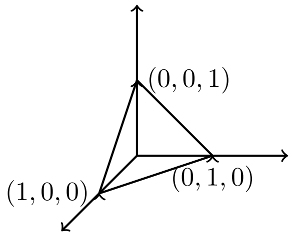
Lösung 25

1. Aufgabe

Zuerst überlegen wir uns, wie der eingeschlossene Körper aussieht. Am einfachsten ist es, sich zu überlegen, wo die Ebene $z = 1 - x - y$ die drei Koordinatenachsen schneidet, d.h. welche Punkte der Form $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ und $(0, 0, z)$ auf der Ebene $z = 1 - x - y$ liegen. Wir finden durch Einsetzen die Schnittpunkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Der Körper K sieht also wie folgt aus:



Somit kann K durch

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1 - x\,,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

beschrieben werden. Das Volumen ist also gleich

$$\begin{aligned}\iiint_K 1\, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

2. Aufgabe

Es handelt sich hier um eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingung. Wir suchen die Extrema (hier das Minimum) der Funktion f, welche den Abstand eines Punktes P in $\mathbb{R}^3$ vom Nullpunkt beschreibt. Die Nebenbedingung ϕ, die erfüllt sein muss, besagt, dass der Punkt P auf der Ebene E liegen muss. Der Abstand eines Punktes $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vom Ursprung $(0, 0, 0)$ ist $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die Nebenbedingung, die P erfüllen muss, ist $\phi(x, y, z) = x + y + 2z - 6 = 0$ (Ebenengleichung). Die Hilfsfunktion ist also

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(x + y + 2z - 6).$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung und setzen sie gleich Null

$$\begin{aligned}
\partial_x F(x, y, z, \lambda) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = 0 \\
\partial_y F(x, y, z, \lambda) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = 0 \\
\partial_z F(x, y, z, \lambda) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda = 0 \\
\partial_\lambda F(x, y, z, \lambda) &= x + y + 2z - 6 = 0.
\end{aligned}$$

Zuerst versuchen wir, λ zu eliminieren. Die 1. Gleichung nach λ aufgelöst ergibt

$$\lambda = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

was wir in die 2. und 3. Gleichung einsetzen. Wir erhalten

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \text{und} \qquad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Daraus folgt direkt $y = x$ und $z = 2x$. Diese y und z setzen wir in die 4. Gleichung ein und bekommen

$$x + y + 2z - 6 = 6x - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1.$$

Folglich ist auch $y = 1$ und $z = 2$. Das gesuchte Extremum ist demnach der Punkt $(1, 1, 2)$. Dieser besitzt den Abstand $f(1, 1, 2) = \sqrt{6}$ vom Ursprung.

3. Aufgabe

(a) Wir benutzen Polarkoordinaten und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 re^{r^2} dr d\phi = \frac{\pi}{2} \int_0^1 re^{r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(e - 1).$$

(b) (**Optional**)

$$\int_\pi^{2\pi} \int_{x^2}^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy\, dx = \int_\pi^{2\pi} \Big[-x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\Big]_{x^2}^{x^3} dx = \int_\pi^{2\pi} [-x\cos(x^2) + x\cos(x)]dx$$

und weiter

$$\int_\pi^{2\pi} [-x\cos(x^2) + x\cos(x)]dx = \Big[-\frac{\sin(x^2)}{2} + x\sin(x) + \cos(x)\Big]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{2}(\sin(\pi^2) - \sin(4\pi^2)) + 2.$$

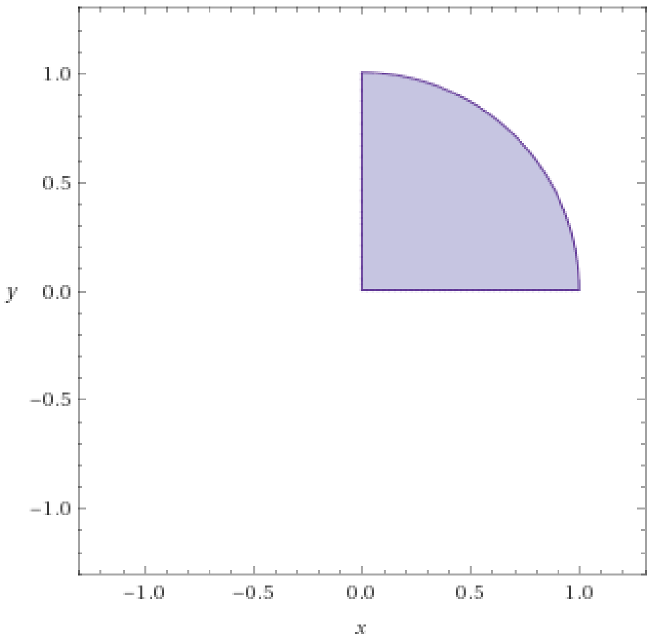


Abbildung 1: Das Gebiet A.

4. Aufgabe

Das Gebiet D ist ein Rechteck. Für das Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x+y)\,dy\,dx &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}\,dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(x+\pi/2)+\cos(x))\,dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x)+\cos(x))\,dx = -\cos(x)+\sin(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

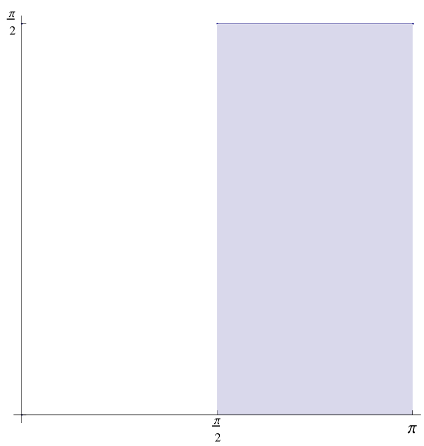


Abbildung 2: Das Gebiet D.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (g).

Mit Schnittpunkt der Diagonalen als Ursprung ergibt wegen der Vorraussetzungen $\rho(x,y) = c \cdot (x^2+y^2),\ c \in \mathbb{R}$ und $\rho(a,a) = 1$. Damit rechnen wir die Konstante c aus: $\rho(a,a) = 1 = c(a^2+a^2) = c \cdot 2a^2$. Damit ergibt sich $\rho(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2\,a^2}$. Die Platte ist ein Quadrat $\{(x,y) | -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}$, also

$$\begin{aligned}\iint_{\text{Platte}} \rho\,dx\,dy &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{x^2+y^2}{2\,a^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2\,a^2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{x^3}{3} + x\,y^2\right)\Big|_{x=-a}^{a}\,dy \\ &= \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3\,y}{3} + \frac{a\,y^3}{3}\right)\Big|_{y=-a}^{a} = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) = \frac{4}{3}\,a^2.\end{aligned}$$

Und dies ist genau die Masse – analog wie im Fall eines Volumentintegrals.

2. Ergebnis: (c).

Das Integral ist gleich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\int_{x-z}^{x+z} x+y+z\,dy\,dx\,dz &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{z}\left[xy + \frac{y^2}{2} + zy\right]_{x-z}^{x+z}\,dx\,dz \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{z} 2xz + \frac{(x+z)^2-(x-z)^2}{2} + 2z^2\,dx\,dz \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{z} 2xz + \frac{4xz}{2} + 2z^2\,dx\,dz \\ &= \int_{-1}^{1}\left[2x^2z + 2xz^2\right]_0^z\,dz \\ &= \int_{-1}^{1} 4z^3dz \\ &= \left[z^4\right]_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

3. Ergebnis: (c).

Die Gleichung der Funktion φ für die Nebenbedingung lautet $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1$. Mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren wissen wir, dass die Extrema allenfalls unter den Lösungen eines Gleichungssystems auftauchen, d.h. hier, falls (x,y) ein Extremum ist, muss es auch Lösung der drei Gleichungen

$$2x + \lambda 2x = 0, \quad 2 + \lambda 2y = 0, \quad x^2+y^2 = 1$$

sein. Die erste Gleichung ist erfüllt für $x = 0$ oder $\lambda = -1$. Für $x = 0$ ergibt die dritte Gleichung $y^2 = 1$, also $y = \pm 1$. Für $\lambda = -1$ liefert die zweite Gleichung $y = 1$ und dies eingesetzt in der dritten $x = 0$. Wir wissen aber nicht, ob es sich tatsächlich, bei $(0,1)$ und $(0,-1)$ um Extrema handelt.

4. Ergebnis: (b).

Sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Um das Integral

$$\iiint_V yz^2 dx\, dy\, dz$$

zu bestimmen, definieren wir zuerst $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\iint_D y\, dx\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sin(\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \sin(\varphi) \right]_0^1 d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin(\varphi) d\varphi \\
&= \left[\frac{1}{3}(-\cos(\varphi)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Das heisst, dass

$$\begin{aligned}
\iiint_V yz^2 dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-y^2} yz^2 dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \left[\iint_D y dx\, dy \right] z^2 dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} z^2 dz \\
&= \left[\frac{1}{9} z^3 \right]_0^1 = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$