Lösung 26

1. Aufgabe

(a) Mögliche Parametrisierungen der Wege sind

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : \quad & \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 2, \\
\gamma_2 : \quad & \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4 \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 2, \\
\gamma_3 : \quad & \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-t \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 4.
\end{aligned}$$

(b) Um ein Linenintegral zu berechnen, setzen wir die Parametrisierungen aus (a) in das Vektorfeld ein. Danach leiten wir die Parametrisierungen ab und bilden das Skalarprodukt mit dem Vektorfeld. Für den ersten Weg bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(r_1(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(r_1(t)) \cdot \dot{r}_1(t) = t^2 + 2t^3.
\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_1 ist dann

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^2 (t^2 + 2t^3) dt = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}.$$

Für γ_2 gehen wir analog vor.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(r_2(t)) = \begin{pmatrix} 4 \\ (2-t)^2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(r_2(t)) \cdot \dot{r}_2(t) = -4.
\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_2 ist dann

$$\int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_0^2 4\, dt = -8.$$

Das gleiche Vorgehen gilt für γ_3.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{F}(r_3(t)) = \begin{pmatrix} 4-t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{F}(r_3(t)) \cdot \dot{r}_3(t) = 0.
\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_3 ist demnach 0. Die Summe der drei Integrale ergibt das Integral entlang C;

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

(c) Wenn wir die Komponenten von $\overrightarrow{F}$ durch $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ beschreiben, dann besagt die Formel von Gauss-Green, dass

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\, dD,$$

wobei D das durch die Kurve C eingeschlossene Gebiet ist. Auf der rechten Seite steht ein normales Doppelintegral. In unserem Fall ist

$$\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) = 2x - 1$$

und D ist die durch γ_1, γ_2 und γ_3 begrenzte Fläche, die man schreiben kann als

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2\,,\ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\, dD &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 (2x-1)\, dy dx \\
&= \int_0^2 \left(2xy - y \,\Big|_{x^2}^4\right) dx = \int_0^2 (8x - 4 - 2x^3 + x^2)\, dx \\
&= 4x^2 - 4x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\,\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Wir haben somit berechnet

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{8}{3}.$$

2. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : &\qquad \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} &&\text{mit } 0 \leq t \leq 2, \\
\gamma_2 : &\qquad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4 \end{pmatrix} &&\text{mit } 0 \leq t \leq 2, \\
\gamma_3 : &\qquad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} &&\text{mit } -4 \leq t \leq 0.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 (t^2 + 2t^3)\, dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^2 + \frac{1}{2}t^4\Big|_0^2 = \frac{32}{3}, \\
I_2 &= \int_0^2 -4\, dt = -4t\Big|_0^2 = -8, \\
I_3 &= \int_{-4}^0 0\, dt = 0, \\
\implies I &= I_1 + I_2 + I_3 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned}
\gamma_1: \quad & \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } 0 \le t \le \pi, \\
\gamma_2: \quad & \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } -1 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi (\sin t) \cdot (-\sin t)\, dt + 2(\cos t) \cdot (\cos t)\, dt \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(2t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{3}{4} \sin(2t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \\
I_2 &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt + 2t \cdot 2t dt = \int_{-1}^1 (5t^2 - 1) dt = \left[\frac{5}{3} t^3 - t\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \\
I &= I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Der Satz von Green ergibt

$$I = \iint_A (2-1) dA = \iint_A dA$$

wobei A die von γ eingeschlossene Fläche ist. Die Fläche von A ist die Summe der Teilflächen von A ober- und unterhalb der x-Achse, also gilt

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A dA = \int_{\varphi=0}^\pi \int_{r=0}^1 1 \cdot r\, dr d\varphi + \int_{x=-1}^1 \int_{y=x^2-1}^0 1 \cdot dy\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Der Betrag ist zwar konstant gleich 1, die Richtung jedoch nicht. Beispielweise ist

$$\vec{F}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aber

$$\vec{F}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Ergebnis: (d).

Mit der Formel von Green ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\, dD \\ &= \iint_D 1 - (-1)\,\mathrm{d}D = 2 \iint_D 1\,\mathrm{d}D \\ &= 2 \cdot \text{Fläche}(D) = 2 \cdot (4^2)\pi = 32\pi. \end{aligned}$$

Alternativ folgt das auch ohne die Formel: zum Beispiel mit der Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 4\cos(t) \\ 4\sin(t) \end{pmatrix}.$$

3. Ergebnis: (e).

Es gilt

$$\dot{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das impliziert

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + t \cdot 1\, dt \\ &= \int_0^\pi t\, dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Ergebnis: (a).

Die Strecke C kann man wie folgt beschreiben:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das impliziert

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2t+2) \cdot 0 \cdot 2 + e^{2t+2} \cdot 0 \, dt = 0.$$