Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

D–BIOL D–CHAB D–HEST

Probeprüfung / Selbsteinstufungstest
Mathematik II

401-0292-00L

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

Multiple Choice

1. Aufgabe **[20 Punkte]**

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst **0 Punkte**. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

MC1. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Rang von A?

(A) 0,
(B) 1,
(C) 2,
(D) 3,
(E) 4.

MC2. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Was ist die Determinante von A?

(A) 0,
(B) 2,
(C) 12,
(D) 24.

MC3. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche Rechenregel gilt im Allgemeinen nicht?

(A) $\det(2A) = 2\det(A)$,
(B) $\det(A)\det(B) = \det(AB)$,
(C) $\det(AB) = \det(BA)$,
(D) $\det(I_n) = 1$.

MC4. Betrachten Sie die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sind Sie linear abhängig?

(A) Ja,

(B) Nein.

MC5. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Welche Aussage ist richtig?

(A) Es gilt $Rang(A) = 2$,

(B) Es gilt $Rang(A) = 3$,

(C) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = c$ hat eine eindeutige Lösung,

(D) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = c$ hat unendlich viele Lösungen.

MC6. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Was sind die Eigenwerte von A?

(A) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,

(B) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$,

(C) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,

(D) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

MC7. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Aussage ist richtig?

(A) Alle Eigenwerte von A sind verschieden von 0,
(B) Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig,
(C) Es ist $\det(A) = 4$,
(D) Die Matrix A ist invertierbar.

MC8. Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I_n$.

(A) Richtig,
(B) Falsch.

MC9. Welche ist die allgemeine Lösung auf $\mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' + y + x = 0$?

(A) $y = -x + 1 + C$,
(B) $y = C\exp(-x) - x + 1$,
(C) $y = -x^2 + x + C$,
(D) Diese Differentialgleichung hat keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

MC10. Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(A) $y = 0$ ist die einzige konstante Lösung der Differentialgleichung,
(B) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y = Cxe^{-3x}$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
(C) Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2.Ordnung,
(D) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$ für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgaben

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2017) **[13 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie die Determinante von A aus.

(b) [**2 Punkte**] Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösungsmenge $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ an.

(c) [**5 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix C.
ii. Finden Sie einen Eigenvektor der Länge 1 zum grössten Eigenwert von C.
iii. Begründen Sie, wieso Sie die Determinante von C mit Teilaufgabe i) und ii) ohne weitere Rechnung direkt angeben können.

(d) [**4 Punkte**] (**Prüfung Sommer 2022**) Sei $b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.
ii. Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.
iii. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des linearen Gleichungssystem $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?

3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2019) **[17 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

(a) [**3 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung (DGL):

$$y'(x) = y(x)(x^2 + 1). \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (1) mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ mittels Trennung der Variablen.

(b) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1.Ordnung

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - 1}{x}$$

mithilfe der Trennung der Variablen.

(c) [**4 Punkte**] Man betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) = e^{2x} + e^{x}. \tag{2}$$

Finden Sie die allgemeine Lösung von (2) mithilfe der Variation der Konstanten.

(d) [**7 Punkte**]
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems 2.Ordnung

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$