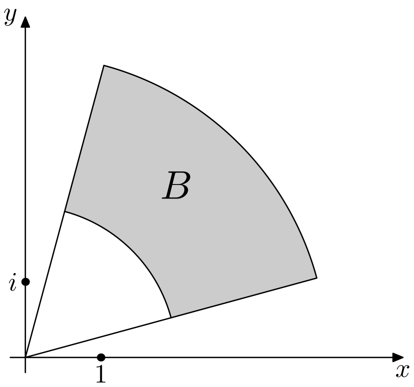
Serie 13

Abgabe: Keine. Diese Serie wird in der ersten Übungsstunde im nächsten Semester besprochen.

1. Aufgabe

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12} \right\}.$$



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 der Quotient $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ in B liegt und für welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

- $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ und $z_2 = i$
- $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$
- $z_1 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

2. Aufgabe

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungen in kartesischer Form an.

(a) $4z\bar{z} + (z - \bar{z})^2 = 1$ Hinweis: Setzen Sie mit $z = x + iy$ an.

(b) $z^2 = -8 + i\ 8\sqrt{3}$

(c) $z^3 = -1$

(d) $z^3 = 8$

(e) $z^4 = -2 - i\ 2\sqrt{3}$

(f) $z^2 = 2 - i\ 2\sqrt{3}$

3. Aufgabe

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in die kartesische Form $z = x + iy$.

(a) $z = \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{2i + \cfrac{1}{3i+1}}}$

(b) $z = (1 - \sqrt{3}\, i)^{10}$

(c) $z = (1 - i)^{-8}$

4. Aufgabe

Folgende Aufgabe stammt aus der Basisprüfung Sommer 2017.

(a) Stellen Sie folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahleneben $\mathbb{C}$ dar.

$$\Big\{ z \in \mathbb{C} \,\Big|\, 1 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq 3 \text{ und } |z| \geq 2 \Big\}$$

(b) Die Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 - i)$$

besitzt drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 in den komplexen Zahlen.

Geben Sie die Lösungen **in Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$z_1 =$ ______________ $\qquad z_2 =$ ______________ $\qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7}{4}\pi}$

(c) Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Und sei

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \big).$$

Wie muss α gewählt werden, damit z eine **positive reelle** Zahl ist? Das heisst, damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt?

Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$\alpha =$ ______________

(d) Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen **in kartesischer Darstellung** $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{1 - \frac{1-i}{1+i}} = \text{______________}$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}(1 - i\sqrt{3})^3 = \text{______________}$$

Berechnen Sie den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\overline{2i\big(\sqrt{-49} + 3\big)}$, also

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\big(\sqrt{-49} + 3\big)} \Big) = \text{______________}.$$

Multiple Choice

Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) z ist nie reell.

(b) $-\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{2}$

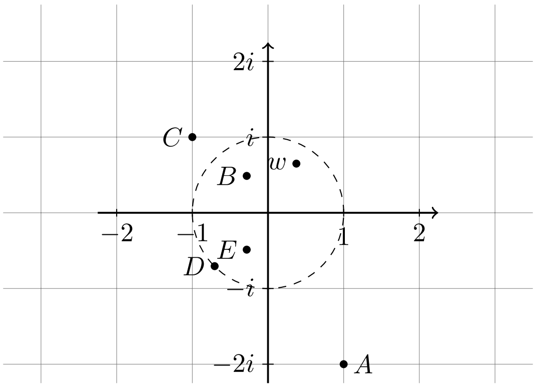
(d) $\frac{6}{\pi}$

(e) $-\frac{\pi}{6}$

(f) -5

(g) 0

2. Betrachten Sie die Zahlen A bis E und w in der komplexen Zahlenebene:



Welcher Buchstabe A bis E entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^2$?

(a) A

(b) B

(c) C

(d) D

(e) E