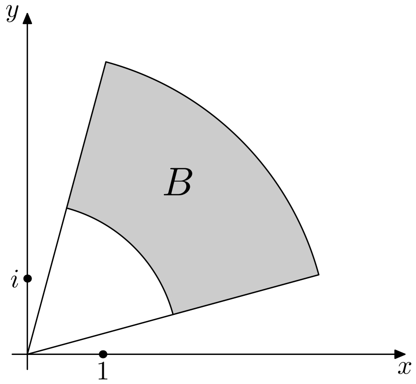
Serie 13

Abgabe: Keine. Diese Serie wird in der ersten Übungsstunde im nächsten Semester besprochen.

1. Aufgabe

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit

$$B = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12} \right\}.$$



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 der Quotient $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ in B liegt und für welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

- $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ und $z_2 = i$
- $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$
- $z_1 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Lösung:

Wenn wir z_1 und z_2 in Polardarstellung $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ schreiben, sehen wir sofort, dass der Quotient $z = \frac{z_1}{z_2}$ die komplexe Zahl mit Betrag $\frac{r_1}{r_2}$ und Argument $\varphi_1 - \varphi_2$ ist, denn

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Damit $z = \frac{z_1}{z_2} \in B$ gilt, müssen wir also nur kontrollieren, ob

$$2 \leq \frac{r_1}{r_2} \leq 4 \qquad \text{und} \qquad \frac{\pi}{12} \leq \varphi_1 - \varphi_2 \leq \frac{5\pi}{12}$$

gilt. Für die verschiedenen Optionen berechnen wir

- $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und $z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
  Somit ist $z \in B$, da $\frac{r_1}{r_2} = 3$ und $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$.
- $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
  Somit ist $z \notin B$, da $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$.

- $z_1 = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Somit ist $z \notin B$, da $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{12} \mathrel{\hat{=}} \frac{23\pi}{12}$.
- $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Somit ist $z \in B$, da $\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2}$ und $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$.

2. Aufgabe

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungen in kartesischer Form an.

(a) $4z\bar{z} + (z - \bar{z})^2 = 1$ Hinweis: Setzen Sie mit $z = x + iy$ an.

(b) $z^2 = -8 + i\ 8\sqrt{3}$

(c) $z^3 = -1$

(d) $z^3 = 8$

(e) $z^4 = -2 - i\ 2\sqrt{3}$

(f) $z^2 = 2 - i\ 2\sqrt{3}$

Lösung:

(a) Setzen wir den Ansatz $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in die gegebene Gleichung $4z\bar{z} + (z - \bar{z})^2 = 1$ ein, erhalten wir wegen $\bar{z} = x - iy$, dass

$$4(x^2 + y^2) - 4y^2 = 1.$$

Es folgt $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Die Wahl von y ist beliebig. Es ist also $z = \frac{1}{2} + iy$ oder $z = -\frac{1}{2} + iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) Als erstes schreiben wir z^2 in exponentieller Darstellung

$$z^2 = -8 + i8\sqrt{3} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

und suchen zuerst die Lösungen z dieser Gleichung in exponentieller Darstellung. Falls $z = re^{i\varphi}$, dann ist $z^2 = r^2e^{2i\varphi}$. Gesucht sind also $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$r^2e^{2i\varphi} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Daraus folgt $r = 4$ und dass 2φ bis auf Vielfache von 2π gleich $\frac{2\pi}{3}$ ist. Das bedeutet $2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und somit $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi k$. Setzen wir verschiedene $k \in \mathbb{Z}$ ein, sehen wir, dass die möglichen $\varphi \in [0, 2\pi)$ gleich $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ sind. Es folgt

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 + i2\sqrt{3}$$

oder

$$z = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -2 - i2\sqrt{3}.$$

(c) Es ist $z^3 = -1 = e^{i\pi}$. Wie oben folgt also $z = re^{i\varphi}$ mit $r = 1$ und $3\varphi = \pi + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen ($k \in \mathbb{Z}$) drei verschiedene mögliche φ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{\pi}{3}, \pi$

und $\frac{5\pi}{3}$. Das heisst, die Gleichung hat die drei Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= e^{i\pi} = -1 \\ z_3 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Beachte: $z_1 = z_3^*$. Dies ist kein Zufall. Komplexe Lösungen von Polynom-Gleichungen mit **reellen** Koeffizienten treten immer in Paaren auf, d.h. falls z_0 eine Lösung ist, ist auch z_0^* eine Lösung.

(d) Es ist $z^3 = 8 = 8e^{i\cdot 0\pi}$. Wie oben folgt also $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt[3]{8} = 2$ und $3\varphi = 0 + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{2\pi}{3}k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen drei verschiedene mögliche φ in $[0, 2\pi)$ und zwar 0, $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$. Das heisst, die Gleichung hat die drei Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^0 = 2 \\ z_2 &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\Big(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) = -1 + i\sqrt{3} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\Big(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Big) = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Beachte: Wieder gilt $z_2 = z_3^*$.

(e) Wieder schreiben wir die Gleichung mit Polardarstellung. Es ist

$$z^4 = -2 - i\,2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

und wie bei den obigen Teilaufgaben folgt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ und $4\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen vier verschiedene mögliche φ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ und $\frac{11\pi}{6}$. Das heisst, die Gleichung hat die vier Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big) = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Big) = \sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\Big) \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\Big) = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ z_4 &= \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\Big) = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

(f) Das Vorgehen ist wieder das gleiche. Es ist mit Polardarstellung

$$z^2 = 2 - i\,2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

und es folgt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = \sqrt{4}$ und $2\varphi = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. Somit ist $\varphi = \frac{5\pi}{6} + \pi k$. Daraus erhalten wir durch Einsetzen zwei verschiedene mögliche φ in $[0, 2\pi)$ und zwar $\frac{5\pi}{6}$ und $\frac{11\pi}{6}$. Das heisst, die Gleichung hat die zwei Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\Big(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Big) = -\sqrt{3} + i \\ z_2 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\Big(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\Big) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

3. Aufgabe

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in die kartesische Form $z = x + iy$.

(a) $z = \dfrac{1}{i + \dfrac{1}{2i + \dfrac{1}{3i+1}}}$

(b) $z = (1 - \sqrt{3}\, i)^{10}$

(c) $z = (1 - i)^{-8}$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{i + \frac{1}{2i+\frac{1}{3i+1}}} = \frac{1}{i + \frac{1}{\frac{2i(3i+1)+1}{3i+1}}} = \frac{1}{i + \frac{3i+1}{2i-5}} = \frac{1}{\frac{i(2i-5)+3i+1}{2i-5}} \\ &= \frac{2i-5}{-2i-1} = \frac{(2i-5)(-1+2i)}{(-2i-1)(-1+2i)} = \frac{1}{5} - i\frac{12}{5} \end{aligned}$$

(b) Umgeformt in exponentielle Darstellung ist $1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} z = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^{10} &= (2e^{i\frac{5}{3}\pi})^{10} = 2^{10}e^{i\frac{50}{3}\pi} \\ &= 2^{10}\left(\cos\left(\tfrac{50\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{50\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2^{9}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) . \end{aligned}$$

(c) Umgeformt in exponentielle Darstellung ist $1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} z = \left(1 - i\right)^{-8} &= (\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}})^{-8} = (\sqrt{2})^{-8}e^{-i\frac{56\pi}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2^4}\left(\cos\left(\tfrac{-56\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{-56\pi}{4}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2^4}\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = \tfrac{1}{16}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Folgende Aufgabe stammt aus der Basisprüfung Sommer 2017.

(a) Stellen Sie folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahleneben $\mathbb{C}$ dar.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq 3 \text{ und } |z| \geq 2 \right\}$$

(b) Die Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 - i)$$

besitzt drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 in den komplexen Zahlen.

Geben Sie die Lösungen **in Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$z_1 =$ __________ $\qquad$ $z_2 =$ __________ $\qquad$ $z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

(c) Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Und sei

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right).$$

Wie muss α gewählt werden, damit z eine **positive reelle** Zahl ist? Das heisst, damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt?

Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$$\alpha = \underline{\hspace{3cm}}$$

(d) Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen **in kartesischer Darstellung** $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{1 - \frac{1-i}{1+i}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

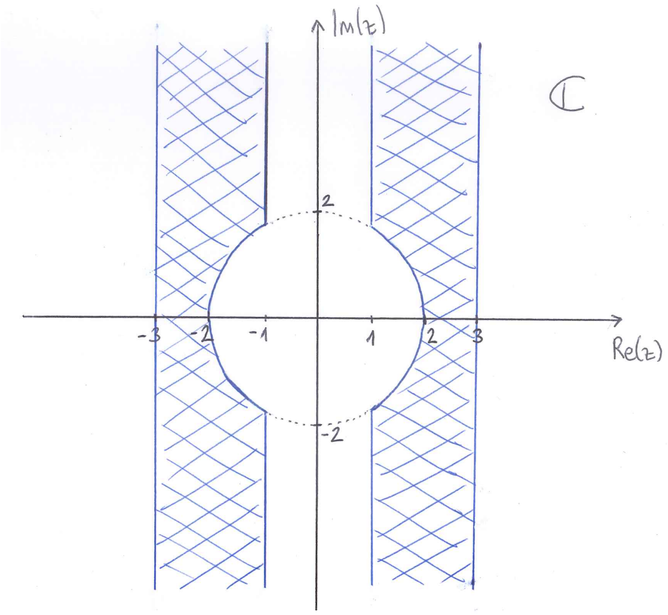
$$e^{i\frac{3}{2}\pi}(1 - i\sqrt{3})^3 = \underline{\hspace{3cm}}$$

Berechnen Sie den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\overline{2i\left(\sqrt{-49} + 3\right)}$, also

$$\mathrm{Im}\left(\overline{2i\left(\sqrt{-49}+3\right)}\right) = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Lösung:

(a) Die gesuchte Menge ist:



(b) Der Betrag der zwei fehlenden Lösungen z_1 und z_2 ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wie z_3. Um die Winkel zu erhalten, kann man zum Winkel der gegebenen Lösung Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ addieren. Man erhält so einerseits $\frac{7}{4}\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{29}{12}\pi$ und andererseits $\frac{7}{4}\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{37}{12}\pi$. Zuletzt müssen diese Winkel durch Subtraktion von 2π wieder nach $[0, 2\pi)$ verschoben werden. Man erhält die Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

Alternativ: Gesucht ist $z = re^{i\varphi}$. Die rechte Seite der Gleichung in exponentieller Darstellung ist

$$\frac{1}{4}(-1-i) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

Die zu lösende Gleichung ist somit ist $r^3e^{i3\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{5}{4}\pi}$. Daraus folgt $r = (\frac{\sqrt{2}}{4})^{\frac{1}{3}} = (2^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi = \frac{5}{12}\pi + \frac{2\pi k}{3}$ mit $k = 0, 1, 2$. Die Lösungen der Gleichung sind also in exponentieller Darstellung

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5}{12}\pi} \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

In trigonometrischer Darstellung ist es

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{5}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{5}{12}\Big)\Big) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\Big(\frac{13}{12}\Big) + i\sin\Big(\frac{13}{12}\Big)\Big).$$

(c) Für z gilt

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\alpha)} = \cos(\tfrac{\pi}{4}+\alpha) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\alpha).$$

Damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt, braucht man also $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) = 0$ und $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) > 0$. Aus der ersten Bedingung folgt $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ oder $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. Nur $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ erfüllt auch die zweite Bedingung. Die richtige Antwort ist

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

(d) Die erste Antwort ist

$$\frac{2}{1-\frac{1-i}{1+i}} = \frac{2}{1-\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \frac{2}{1-\frac{-2i}{2}} = \frac{4}{2+2i} = \frac{4(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{8-8i}{8} = 1-i.$$

Die zweite Antwort ist

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}\cdot(1-i\sqrt{3})^3 = -i\cdot(2e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = -i\cdot 8e^{i\pi} = -i\cdot(-8) = 8i.$$

Die dritte Antwort ist

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\big(\sqrt{-49}+3\big)}\Big) = \mathrm{Im}\big(\overline{2i(\pm 7i+3)}\big) = \mathrm{Im}(\overline{\mp 14+6i}) = \mathrm{Im}(\mp 14-6i) = -6.$$

Multiple Choice

Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie “Weiss ich nicht.” So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) z ist nie reell.

(b) $-\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{6}{\pi}$

(e) $-\frac{\pi}{6}$

√ (f) -5

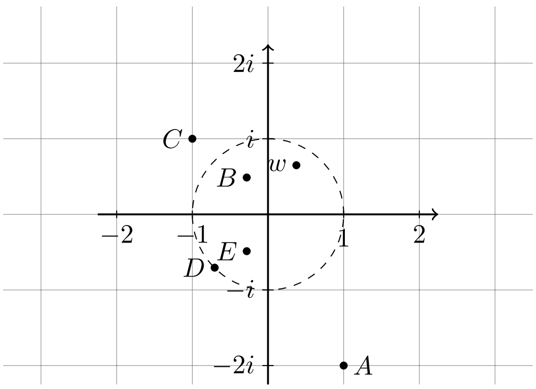
(g) 0

Es gilt

$$\begin{aligned} z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + bi) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(5\sqrt{3} + bi) \\ &= 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet: $b\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 0 \implies b = -5$.

2. Betrachten Sie die Zahlen A bis E und w in der komplexen Zahlenebene:



Welcher Buchstabe A bis E entspricht der komplexen Zahl $\overline{w}^2$?

(a) A

(b) B

(c) C

(d) D

√ (e) E

Da $|w| = |\overline{w}| < 1$, ist auch $|\overline{w}^2| < 1$, und es bleiben nur B oder E. Wegen $-\frac{\pi}{2} < \arg(\overline{w}) < 0$ folgt $-\pi < \arg(\overline{w}^2) < 0$, und B kann es nicht sein.