Serie 16

1. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $D = T^{-1}AT$.

(c) Berechnen Sie $E = A^{-1}TD$.

2. Aufgabe

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von λ ist A regulär?

(b) Sei λ so, dass A regulär ist. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Jordan-Verfahren die inverse Matrix der folgenden regulären Matrizen. Kontrollieren Sie am Ende der Rechnung, dass die gefundene Matrix wirklich die inverse Matrix ist.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe

(a) Betrachten Sie folgende 4×4-Matrix in sogenannter diagonaler Blockform:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen der Determinante von C und den Determinanten von

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Setzen Sie ein paar Beispielwerte für die Unbekannten ein, um eine Vorstellung davon zu bekommen, was die Lösung sein könnte. Verwenden Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) (**Optional**) Nehmen Sie nun an, dass C invertierbar ist. Finden Sie die Inverse von C.

Hinweis: Nutzen Sie die Blockform von C. Vergewissern Sie sich, dass

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Es ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots$

(a) $\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Seien a und b relle Zahlen mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) B ist invertierbar,

(b) $B^2 = B$,

(c) $\det(B) = \det(A)$.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ (reelle Zahlen ohne 0). Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Dann ist $A^n = \dots$ für alle $n = 2, 3, 4, \dots$

(a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$,

(b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$,

(c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & nb \end{pmatrix}$,

(d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & nb \end{pmatrix}$,

(e) Nichts von dem.

4. Seien $0 < \alpha < 2\pi$ und $0 < \phi < \pi$. Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist in jedem Fall $\alpha = \dots$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel die Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b), \quad \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b).$$

(a) $\alpha = \frac{1}{2}\phi$,

(b) $\alpha = 2\phi$,

(c) $\alpha = \phi^2$,

(d) $\alpha = \sqrt{\phi}$,

(e) Nichts von dem.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 11. März um 12 Uhr im Raum HG J 68, in einem der Fächer beschriftet mit Abgabe (oder über SAMup).