Serie 17

1. Aufgabe

Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Was erhalten Sie, wenn Sie das Skalarprodukt von je zwei der Spaltenvektoren in A berechnen? Wie nennt man solche Vektoren?

(b) Was ist die Determinante von A?

(c) Finden Sie die Inverse von A. **Hinweis:** Worauf deuten die vorangegangenen Teilaufgaben hin?

2. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gauss-Verfahren jeweils den Rang.

(b) Bestimmen Sie mit dem Gauss-Jordan-Verfahren die inverse Matrix von B. Kontrollieren Sie am Ende der Rechnung, dass die gefundene Matrix wirklich die inverse Matrix ist.

3. Aufgabe

Für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen folgende homogene lineare Gleichungssysteme nicht-triviale Lösungen?

(a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Aufgabe

Zeigen Sie:

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine 2×2 - Matrix mit $\det(A) \neq 0$, so ist die dazu inverse Matrix

$$B = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Es ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$

(a) $\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\pi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Für welche x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) Die Matrix A ist unhabhängig von x_1 und x_2 nie invertierbar,

(b) $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$,

(c) $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$,

(d) $x_1 = x_2 = 1$,

(e) $x_1 = x_2 = -1$.

3. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aus dieser möchten wir den ersten Spaltenvektor extrahieren. Das heisst, wenn wir A von rechts oder links mit einer weiteren Matrix multiplizieren, erhalten wir den ersten Spaltenvektor von A. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $AB = I_n$. Dann sind A und B invertierbar.

(a) richtig,

(b) falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 18. März um 12 Uhr über SAMup.