Serie 18

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$, für $\phi \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie mittels des Gauss-Verfahrens die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x - 5y & = & 3 \\ 7x + 9y & = & 5 \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y - z & = & 0 \\ x - y + z & = & 6 \\ -x + y + z & = & -6 \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{rcl} 4y + 2z & = & 0 \\ x + 5y + 3z & = & 2 \\ x + 3y + 2z & = & 2 \end{array} \right.$

(d) $\left\{ \begin{array}{rl} x + y + z + w & = 3 \\ -2x + z + w & = 2 \\ 3x + y + 2z + w & = 4 \end{array} \right.$

3. Aufgabe

Gegeben sei die vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ abhängige Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{C}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von λ verschwindet die Determinante von A?

(b) Wann hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

(i) nur die triviale Lösung $x = 0$,

(ii) auch nichttriviale Lösungen? Wie lauten diese?

(c) Wann hat das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = c$ für jede Inhomogenität $c \in \mathbb{C}^3$ genau eine Lösung?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängingkeit von λ.

4. Aufgabe

Sind folgende Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie bei linearer Abhängigkeit einen der Vektoren als Linearkombination der anderen an.

(a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$

(b) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

(c) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},$

(d) $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ist 0,

(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ist invertierbar,

(c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig,

(d) Keine.

2. Welche Eigenschaft erfüllt die Determinante einer Matrix nicht?

(a) Invarianz unter Vertauschen zweier Spalten,

(b) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(c) Linearität in jeder Spalte,

(d) Invarianz unter Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte.

3. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht-triviale Lösungen?

(a) $\lambda = \pm 2$,

(b) $\lambda = \pm 2i$,

(c) $\lambda = \pm 4$,

(d) $\lambda = \pm 4i$.

4. Clélia und Nelia haben ein lineares Gleichungssystem mit 2 reellen Parametern α und β mit dem Gauss-Verfahren auf Zeilenstufenform gebracht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & \beta^2-1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta+1 \end{array}\right)$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Für $\alpha = 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung,

(b) Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System genau eine Lösung,

(c) Für $\alpha \neq 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung,

(d) Für $\beta = -1$ hat das System immer eine Lösung,

(e) Keine.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 25. März um 12 Uhr über SAMup.