Serie 20

1. Aufgabe

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen.

(a) $y'(x) = -xy(x)$ mit $y(0) = 3$,

(b) $y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x^2}$ mit $y(1) = e$,

(c) $y(x)y'(x) = e^{2x}$ mit $y(0) = -1$.

2. Aufgabe

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme mit der Methode der Variation der Konstanten.

(a) $y'(x) = y(x) + x$,

(b) $y'(x) - y(x) = xe^{-x}$,

(c) $y'(x) + 2y(x) = e^{3x}$,

(d) $y'(x) = x^2 + 4 - \frac{y(x)}{x}$ mit $y(2) = 10$ und wobei $x > 0$.

3. Aufgabe

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wählen Sie dabei jeweils die Methode, die Ihnen am praktischsten und einfachsten erscheint.

(a) $(1 + x)y'(x) = y^2(x)$,

(b) $y'(x) + y(x) = e^{-2x}$,

(c) $y'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{y(x)}$,

(d) $y'(x) = e^{-x+y(x)}$,

(e) $\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = \cos^2(x)$ wobei $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

4. Aufgabe

Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung zuerst, indem Sie eine partikuläre Lösung finden, dann nach der Methode der Variation der Konstanten.

(a) $y'(x) - 2y(x) = 1$,

(b) $y'(x) + y(x) = x$.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{x^2}{2}y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

Für welches $n \in \{2, 3, 4\}$ ist $y(x) = x^n$ eine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $n = 2$,

(b) $n = 3$,

(c) $n = 4$.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = 3y(x) + \cos(x)$. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung ist richtig?

(a) Eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$,

(b) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$, für $K \in \mathbb{R}$,

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$, für $K \in \mathbb{R}$,

(d) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$, für $K \in \mathbb{R}$,

(e) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$, für $K \in \mathbb{R}$,

(f) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \sin(x)$, für $K \in \mathbb{R}$,

(g) Keine.

3. Das Wachstum einer Taufliegen-Population unter Laborbedingungen kann näherungsweise durch die Differentialgleichung

$$f'(t) = 0,0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Taufliegen zur Zeit t in Tagen. Für welche Zahl $a > 0$ ist die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0,21t} + 1}$$

eine Lösung der Differentialgleichung?

(a) Für $a = 350$,

(b) Für $a = -\ln(|-0,21|)$,

(c) Für $a = 0,21$,

(d) Für $a = e^{0,21}$,

(e) Für jedes $a > 0$.

4. Ein Gesetz von Newton besagt: Die Änderungsgeschwindigkeit der Oberflächentemperatur $x(t)$ eines Körpers, auch im ersten Sinn des Wortes (Kriminalogie), ist proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des Körpers und der (konstanten) Umgebungstemperatur T. Welche der folgenden DGL modelliert dieses Gesetz? (Dabei ist jeweils $h > 0$ eine Konstante)

(a) $x'(t) = h(x(t) - T)$,

(b) $x'(t) = h(T - x(t))$,

(c) $x'(t) = h\frac{1}{x(t)-T}$,

(d) $x'(t) - x(t) = hT$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 8. April um 12 Uhr über SAMup.