Serie 21

1. Aufgabe

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Variation der Konstanten.

$$y'(x) = y(x) + \sin(x), \quad \text{mit } y(0) = 1.$$

2. Aufgabe

Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme.

(a) $y'(x) = -4y(x) + 8$,

(b) $y'(x) - 2y(x) = 0, \quad \text{mit } y(0) = 1$,

(c) $y'(x) + xy(x) = 0$,

(d) $y'(x) + xy(x) = (x-1)e^{-x}$,
Hinweis: Verwenden Sie
$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

(e) $y'(x) - (3x^2+1)y(x) = e^{x^3}, \quad \text{mit } y(0) = 1$,

(f) $y'(x) = \sin(x)y(x), \quad \text{mit } x \geq 0 \text{ und } y(0) = 100$,

(g) $y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{y(x)}{x} + 1\right), \quad \text{mit } x > 0 \text{ und } y(4) = 3$.

3. Aufgabe

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wählen Sie dabei jeweils die Methode, die Ihnen am praktischsten und einfachsten erscheint.

(a) $y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(x)$,

(b) $y'(x) = xy^2(x) + x$,

(c) $y'(x) = \frac{2-\sin(x+2y(x))}{2\sin(x+2y(x))}$,

(d) $y'(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2$.

4. Aufgabe

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel löst, ist proportional zum Produkt

- der noch unaufgelösten Menge von S mit
- der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes.

Gegeben sei ein Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels. Zur Zeit $t = 0$ seien darin 10 kg des Stoffes S enthalten. Die Sättigungskonzentration sei $\frac{1}{4}$.

(a) Sei $k > 0$ eine Konstante. Welche der folgenden DGL modelliert die Entwicklung von S? Dabei ist $x(t)$ die Menge des zur Zeit t gelösten Stoffes.

(i) $x'(t) = k(x(t) - 10)\left(\frac{1}{4} - \frac{x(t)}{100}\right)$,

(ii) $x'(t) = k(10 - x(t))\left(\frac{1}{4} - \frac{x(t)}{100}\right)$,

(iii) $x'(t) = k(100 - x(t))\left(\frac{1}{4} - \frac{x(t)}{10}\right)$,

(iv) $x'(t) = k\left(\frac{1}{4} - x(t)\right)\left(100 - \frac{x(t)}{10}\right)$.

(b) Stellen Sie das zugehörige Anfangswertproblems auf.

(c) Nach 10 Minuten wurde eine Lösungskonzentration von $\dfrac{1}{20}$ gemessen. Bestimmen Sie damit $x(t)$.

(d) Nach wie viele Minuten sind 80% des Stoffes S aufgelöst?

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 3y\Big(1 - \frac{y}{2}\Big)$$

geht durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung über in

(a) $\int \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{3}x + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$

(b) $\int \left(\frac{3}{2-y} + \frac{3}{y}\right) dy = 3x + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$

(c) $\int \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right) dy = 3x + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$

(d) $\int \left(\frac{3}{y-2} - \frac{3}{y}\right) dy = \frac{1}{3}x + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$

2. Welche der folgenden Aussagen über die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichungen 2.Ordnung ist korrekt? Dabei sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Die allgemeine Lösung von $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ ist $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$,

(b) Die allgemeine Lösung von $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ ist $y(x) = C_1e^x + C_2e^x$,

(c) Die allgemeine Lösung von $y''(x) - \omega^2 y(x) = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist $y(x) = C_1e^{\omega x} + C_2xe^{-\omega x}$,

(d) Keine.

3. Welche der folgenden Ansätze ist zum Bestimmen einer partikulären Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x \cos(x)$$

ziehlführend?

(a) $y(x) = ce^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$,

(b) $y(x) = cxe^x \cos(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$,

(c) $y(x) = c_1e^x \cos(x) + c_2e^x \cos(x)$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

(d) $y(x) = c_1xe^x \cos(x) + c_2xe^x \sin(x)$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Die Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\sin(x)y'(x) + y(x) = x^2$$

ist...

(a) homogen und linear,

(b) inhomogen und linear,

(c) homogen und nicht linear,

(d) inhomogen und nicht linear.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 29. April um 12 Uhr über SAMup.