Serie 22

1. Aufgabe

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen ihren maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und zeichnen Sie diesen in Teilaufgabe (a)-(c). Zusatzaufgabe (**optional**): Bestimmen Sie jeweils den Wertebereich.

(a) $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$,

(b) $f_2(x, y) = \log(xy)$,

(c) $f_3(x, y) = e^{\log(x+y)}$,

(d) $f_4(x, y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(y)\cos(x)}{\cos(y)}$.

2. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien von f für die Funktionswerte $-2, -1, 0, 1, 2$,

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$.

3. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = e^{-(2x^2+3y^2)}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} und f_{yy}.

4. Aufgabe

(a) Die *Bernoullische Gleichung* der Strömungsmechanik verknüpft die Geschwindigkeit $v > 0$ und den Druck p innerhalb einer idealen Flüssigkeit mit der Höhe h, das heisst $v = v(p, h)$ mit

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \text{konst.}$$

ρ: Flüssigkeitsdichte,
g: Erdbeschleunigung.

Berechnen Sie die Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit v, wenn sich eine der Grössen p und h ändert und die andere konstant bleibt.

(b) Sei S der Sauerstoffverbrauch eines Pelztieres, T_k seine (innere) Körpertemperatur, T_a die Aussentemperatur seines Pelzes und G sein Gewicht. Messungen haben ergeben, dass

$$S = S(T_k, T_a, G) = \alpha \, \frac{T_k - T_a}{G^{2/3}}, \qquad \alpha \text{ eine positive Konstante.}$$

Berechnen Sie die Änderungsgeschwindigkeit von S, wenn zwei der Grössen T_k, T_a und G konstant sind und sich die dritte verändert.

(c) Der pulsatile Blutstrom in den Kapillaradern wird beschrieben durch

$$V(t, T, Q) = V = \frac{\alpha\kappa t}{QT}\left(e^{\left(-\frac{\alpha t}{T}\right)} - e^{(-\alpha)}\right), 0 \leq t \leq T.$$

Hierbei ist V das Blutvolumen, t die Zeit, Q der Querschnitt der Kapillare, T die Periode des Herzschlags, α und κ körpereigene Parameter. Bestimmen Sie die Änderungsgeschwindigkeit von V bei Variation jeweils einer der Grössen t, Q und T.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$,

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$,

(c) $f'(x) = \cos(x)$,

(d) $f'(x) = \sin(x)$,

(e) Keine der Gleichungen ist korrekt.

2. Sei $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann ist f_{yy} gleich

(a) $\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$,

(b) $\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$,

(c) $\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(d) $\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. Gegeben seien drei Funktionen $\varphi, \psi, \chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit:

$$\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = x^2 \quad \text{und} \quad \chi(x, y) = x^2 + y^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ konstant ist. Sei f eine Funktion mit

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y),$$

deren partielle Ableitungen 2. Ordnung existieren und stetig sind. Eine der folgenden Aussagen über ein solches f ist korrekt. Welche?

Hinweis: Verwenden Sie, dass hier $f_{xy} = f_{yx}$ gilt, um die drei falschen Aussagen auszuschliessen.

(a) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \psi$,

(b) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x = \psi$ und $f_y = \varphi$,

(c) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x = \varphi$ und $f_y = \chi$,

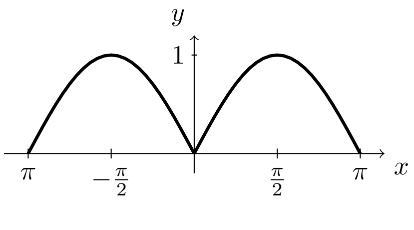
(d) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x = \chi$ und $f_y = \varphi$.

4. Betrachten Sie die Funktion h mit

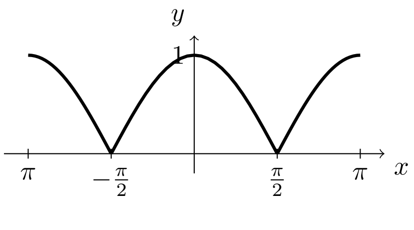
$$h(x) = \left|\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right|.$$

Welcher Graph passt zu der Funktion h?

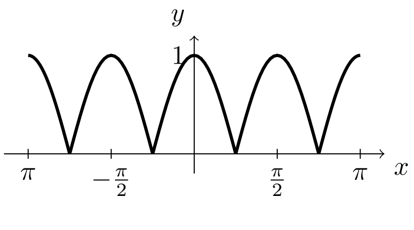
Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.



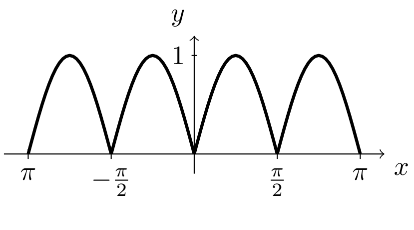
(a)



(b)



(c)



(d)

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 6. Mai um 12 Uhr über SAMup.