Serie 23

1. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^2$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Ableitung von f, bestimmen Sie die kritischen Punkte und entscheiden Sie jeweils ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial s}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

der Funktion $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$, wobei

$$\begin{aligned} &f(x,y) = x^2y + xy^2, \\ &x(s,t) = s + t, \text{ und} \\ &y(s,t) = s - t. \end{aligned}$$

3. Aufgabe

(a) Gegeben sei eine Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$ durch

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z - 4 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(1,2,-1)$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an G_f (Graph von f) im Punkt $(1,1,\frac{1}{2})$.

4. Aufgabe

Sei $F(x,y) = x^2 - y^2 - 3xy + 1$. Eine Kurve in der (x,y)-Ebene sei gegeben durch die Bedingung $F(x,y) = 0$.

(a) Finden Sie alle Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden gegeben durch $y = -x - 1$.

(b) Finden Sie die Tangente an die Kurve im Punkt $(0,-1)$.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \cos\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Sei nun $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $f(x, y) = F(xy + \frac{y}{x})$. Wir suchen Punkte (x, y, z), in denen die Tangentialebene an G_f parallel zur (x, y)-Ebene ist. Für welches Paar (x_0, y_0) ist dies der Fall?

(a) $(x_0, y_0) = (1, e^2)$,

(b) $(x_0, y_0) = (1, e^{\frac{\pi}{2}})$,

(c) $(x_0, y_0) = (1, e^{\pi})$,

(d) $(x_0, y_0) = (1, e)$.

2. Sei f eine Funktion mit

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 9, \quad f_y(x, y) = 4 - y^2.$$

Dann hat f

(a) in $(1, -2)$ ein lokales Maximum,

(b) in $(1, 2)$ einen Sattelpunkt,

(c) in $(-1, 2)$ ein lokales Minimum,

(d) in $(-1, -2)$ ein lokales Extremum.

3. Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist richtig?

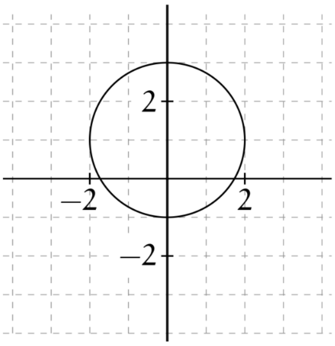
(a) Jedes globale Extremum ist auch ein lokales Extremum,

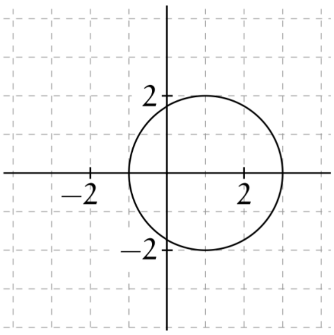
(b) Jedes lokale Extremum ist auch ein globales Extremum,

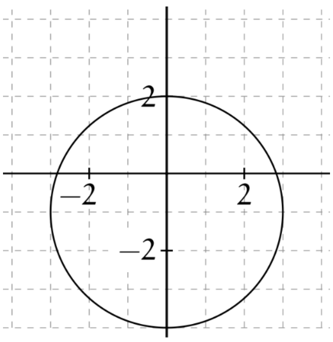
(c) Jedes lokale Extremum, an dem die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist ein globales Extremum.

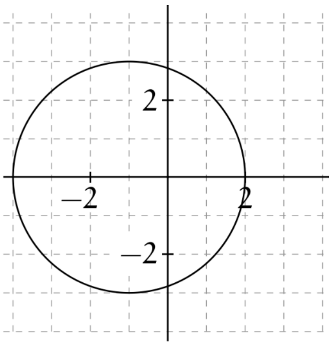
(d) Jede Stelle, an der die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden, ist ein lokales Extremum.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{y-4}$, $y \neq 4$. Was ist die Niveaulinie von f für den Funktionswert -2?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 13. Mai um 12 Uhr über SAMup.