Serie 25

1. Aufgabe

Die drei Koordinatenebenen in $\mathbb{R}^3$ (also xy-, yz- und xz-Ebene) und die Ebene gegeben durch $z = 1 - x - y$ schliessen einen Körper K ein. Skizzieren Sie den Körper K und berechnen Sie dessen Volumen.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie denjenigen Punkt P auf der durch $x + y + 2z = 6$ definierten Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$, welcher vom Ursprung $(0, 0, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

3. Aufgabe

(a) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}$. Skizzieren Sie die Fläche A in einem Koordinatensystem. Bestimmen Sie

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

(b) (**Optional**) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{x^2}^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy\, dx.$$

4. Aufgabe

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. Skizzieren Sie das Gebiet D in einem Koordinatensystem und berechnen Sie

$$\iint_D \sin(x + y)\, dy\, dx.$$

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Die Funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschreibt die Dichte einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge $2a > 0$. Dabei gilt:

- Die Dichte in einem Punkt (x, y) ist proportional zum Quadrat des Abstandes von (x, y) zum Schnittpunkt der Diagolen.
- In den Plattenecken ist die Dichte gleich Eins.

Legen Sie der Schnittpunkt der Diagonalen in den Ursprung der (x, y)-Ebene. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Es gilt $\rho(x, y) = c \cdot (x^2 + y^2)$, $c \in \mathbb{R}$,

(b) Es gilt $\rho(a, a) = 1$,

(c) Es gilt $\rho(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2a^2}$,

(d) $\iint_{\text{Platte}} \rho \, dx \, dy = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{x^2+y^2}{2a^2} dx \, dy$,

(e) $\iint_{\text{Platte}} \rho \, dx \, dy = \frac{4}{3}a^2$,

(f) Die Masse der Platte ist $\frac{4}{3}a^2$,

(g) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

2. Das Integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{z} \int_{x-z}^{x+z} x + y + z \, dy \, dx \, dz$$

ist gleich

(a) 4,

(b) -4,

(c) 0,

(d) Keine der obigen Aussagen.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + 2y$ mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Welcher Punkt kann allenfalls nicht ein Extremum von f unter der Nebenbedingung sein?

(a) $(0, 1)$,

(b) $(0, -1)$,

(c) $(-1, 0)$,

(d) Keine der Punkte.

4. Sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\iiint_V yz^2 dx\, dy\, dz?$$

(a) $\frac{\pi}{4}$,

(b) $\frac{1}{9}$,

(c) $\frac{1}{6}$,

(d) π.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Samstag, den 27. Mai um 12 Uhr über SAMup.