Serie 26

1. Aufgabe

Wir wollen das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ entlang der Kurve C berechnen, die sich aus den Wegen γ_1, γ_2 und γ_3 zusammensetzt. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang der Parabel $y = x^2$. In der folgenden Aufgabe soll das Integral

$$I = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

auf zwei verschiedene Arten berechnet werden.

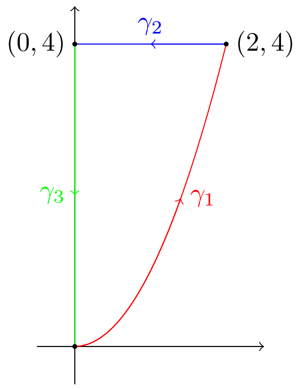

Figure 1: Die drei Wege aus Aufgabe 1.

(a) Finden Sie Parametrisierungen von γ_1, γ_2 und γ_3.
Hinweis: Beachten Sie die Durchlaufrichtung. Es gibt mehrere Lösungen.

(b) Berechnen Sie die Linienintegrale $\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, $\int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ und $\int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, sowie $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, indem Sie die Formel von Gauss-Green benutzen.

2. Aufgabe

Wir betrachten das Linienintegral $\oint_C y\,dx + x^2\,dy$, wobei C die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durchläuft. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der untenstehenden Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang einer Parabel.

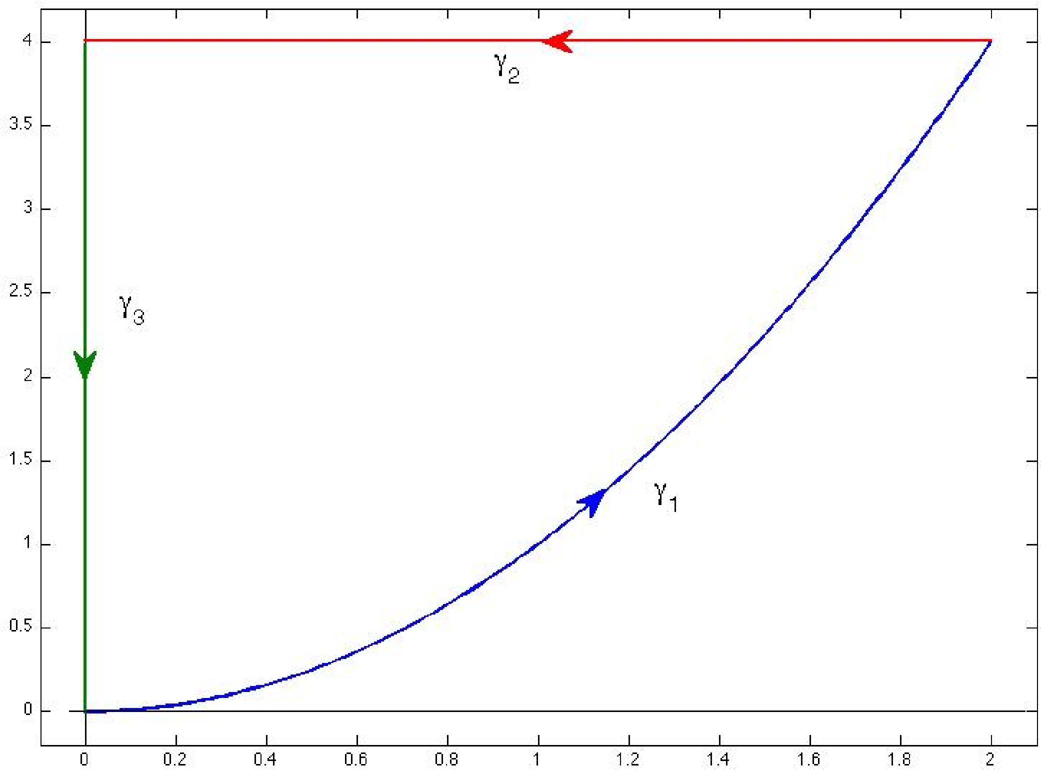

Figure 2: Die drei Wege aus Aufgabe 2.

(a) Parametrisieren Sie die Wege γ_1, γ_2 und γ_3.

(b) Berechnen Sie folgende Linienintegrale mit Hilfe der parametrisierten Wege γ_1, γ_2 und γ_3

$$I_1 = \int_{\gamma_1} y\,dx + x^2\,dy,$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} y\,dx + x^2\,dy,$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} y\,dx + x^2\,dy,$$

und

$$I = \oint_C y\,dx + x^2\,dy.$$

3. Aufgabe

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \end{pmatrix}$, für $x, y \in \mathbb{R}$. Weiter sei die Kurve γ gegeben als Verkettung von zwei Kurven γ_1 und γ_2. Die Kurve γ_1 verläuft entlang des Halbkreises gegeben durch

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ für } -1 \leq x \leq 1,$$

und ist im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Die Kurve γ_2 ist Teil der Parabel

$$y = x^2 - 1,$$

beginnend im Punkt $(-1, 0)$ und aufhörend im Punkt $(1, 0)$.

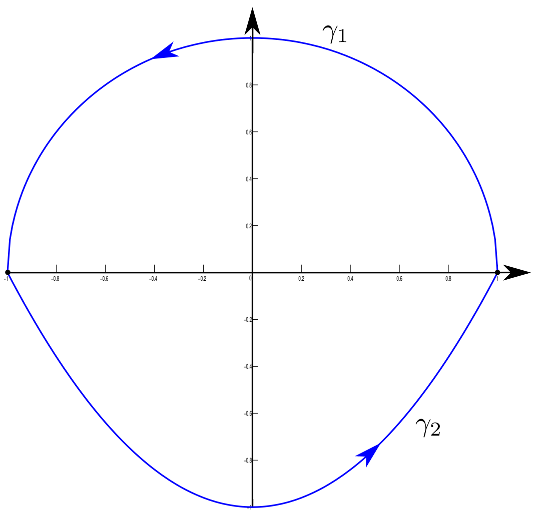

Figure 3: Die Kurven γ_1 und γ_2.

In der folgenden Aufgabe soll das Integral

$$I = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy$$

auf zwei verschiedene Arten berechnet werden.

(a) Parametrisieren Sie γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie mithilfe der Parametrisierungen aus **a)** nacheinander folgende Integrale:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} y\,dx + 2x\,dy,$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} y\,dx + 2x\,dy,$$
$$I = \int_\gamma y\,dx + 2x\,dy.$$

Hinweis: Die folgenden Formeln könnten nützlich sein. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\cos t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2},$$
$$(\sin t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

(c) Berechnen Sie I erneut mithilfe des Satzes von Green.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und schreiben Sie "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Das Vektorfeld $\vec{F}$ mit

$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

hat auf dem Einheitskreis konstante Länge und Richtung.

(a) Richtig,

(b) Falsch.

2. Seien D die Kreisscheibe mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1,0)$, und $\gamma = \partial D$ die (Rand-)Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Für das Vektorfeld $\vec{F}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gilt $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dots$

(a) 0,

(b) 2π,

(c) 16π,

(d) 32π,

(e) 64π.

3. Es seien $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Was ist der Wert des Wertintegrals $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$?

(a) 0,

(b) 1,

(c) π,

(d) $\frac{\pi}{2}$,

(e) $\frac{\pi^2}{2}$.

4. Sei D die Strecke zwischen $(2,0)$ und $(4,0)$. Für das Vektorfeld $\vec{F}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ e^x \end{pmatrix}$ gilt $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ldots$

(a) 0,

(b) 2,

(c) -2,

(d) 4,

(e) -4.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor **Donnerstag**, den 1. Juni um 12 Uhr über SAMup.