D–BIOL D–CHAB D–HEST

Probeprüfung / Selbsteinstufungstest
Mathematik II

401-0292-00L

Lösung

Multiple Choice

1. Aufgabe **[20 Punkte]**

MC1. Ergebnis: (D).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - 4Z_1]{Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - \frac{1}{5}Z_2]{Z_2 \cdot \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das impliziert, dass $Rang(A) = 3$.

MC2. Ergebnis: (D).

Mit der Regel von Sarrus folgt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 6 - 6 + 6 + 6 + 6 = 24.$$

MC3. Ergebnis: (A).

Multipliziert man eine Zeile einer Matrix mit einem Skalar λ, so multipliziert sich die Determinante ebenfalls mit λ. Multipliziert man die gesamte Matrix A mit λ, so multipliziert man n verschiedene Zeilen mit λ, und insgesamt multipliziert sich die Determinante mit λ^n. Es gilt also $\det(2A) = 2^n \det(A)$, und die Aussage (a) ist im Allgemeinen falsch.

MC4. Ergebnis: (A).

Mit der Regel von Sarrus folgt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

MC5. Ergebnis: (B).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4-3Z_1]{Z_3-Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4+3Z_3]{Z_3-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4-6Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $Rang(A) = 3$.

MC6. Ergebnis: (B).

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

MC7. Ergebnis: (B).

Hier ist $\det(A) = 0$, daher sind die Spaltenvektoren von A linear abhängig.

MC8. Ergebnis: (A).

Ist λ ein Eigenwert von A, dann gilt

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Anderseits gilt $A - \lambda I_n = A + I_n - (\lambda + 1)I_n$, was impliziert

$$\det((A + I_n) - (\lambda + 1)I_n) = 0.$$

Das heisst, dass $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + I_n$ ist.

MC9. Ergebnis: (B).

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung vom Typ

$$y' + f(x)y = g(x),$$

wobei $f(x) = 1$ und $g(x) = -x$. Durch Variation der Konstanten wissen wir, dass die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + f(x)y = 0$ lautet

$$y_{hom} = C \exp\Big(- \int f(x)dx \Big) = C \exp(-x).$$

Um die inhomegene Differentialgleichung zu lösen, können wir den folgenden Ansatz benutzen:

$$y = C(x)\exp(-x),$$

was impliziert

$$y' = C'(x)\exp(-x) - C(x)\exp(-x) = (C'(x) - C(x))\exp(-x).$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} y' + y + x &= (C'(x) - C(x))\exp(-x) + C(x)\exp(-x) + x \\ &= C'(x)\exp(-x) + x = 0. \end{aligned}$$

Durch Integration folgt hieraus

$$C(x) = -\int x\exp(x)dx = (1-x)\exp(x) + C.$$

Die inhomogene Differentialgleichung besitzt damit die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \Big[(1-x)\exp(x) + C\Big]\exp(-x) \\ &= C\exp(-x) - x + 1. \end{aligned}$$

MC10. Ergebnis: (B).

Da -3 die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung ist, erhalten wir als Ansatz

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x},$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgaben

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2017) **[13 Punkte]**

(a) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie die Determinante von A aus.

Lösung:

Die Determinante kann zum Beispiel durch Entwickeln nach der dritten Spalte und anschliessender Anwendung der Sarrus-Regel berechnet werden. Es folgt

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3(-16 + 6 + 24 - 6) = -24.$$

(b) [**2 Punkte**] Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösungsmenge $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - \frac{3}{2} Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sei $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Es folgt $x_2 = -1 + \frac{2}{3}t$ und $x_1 = -\frac{4}{3}t$. Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}t \\ -1 + \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

(c) [**5 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix C.
ii. Finden Sie einen Eigenvektor der Länge 1 zum grössten Eigenwert von C.
iii. Begründen Sie, wieso Sie die Determinante von C mit Teilaufgabe i) und ii) ohne weitere Rechnung direkt angeben können.

Lösung:

i. Das charakteristische Polynom von C ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -5 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 20 - 2(2-\lambda) - 5(4-\lambda) + 8\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda - 7). \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon (und somit die Eigenwerte von C) sind

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 7 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -1.$$

ii. Der grösste Eigenwert ist 7 (siehe Teilaufgabe i)). Die Eigenvektoren dazu findet man mit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-7 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2-7 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0-7 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+3Z_1]{Z_2+2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \\ 0 & -19 & -19 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3-\frac{19}{15}Z_2]{Z_2\cdot(-\frac{1}{15})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 7 haben somit die Form $\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \neq 0$. Gesucht ist der Eigenvektor der Länge 1, es muss also $\sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{6t^2} = 1$ gelten. Daraus folgt $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Die zwei möglichen Antworten sind somit

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

iii. Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte der Matrix. Diese haben wir in Teilaufgabe i) ausgerechnet (die Determinante von C ist also 0).

(d) [**4 Punkte**] (**Prüfung Sommer 2022)**
Sei $b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

i. Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.
ii. Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.
iii. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des linearen Gleichungssystem $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?

Lösung:

i. Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt $\det(D_b) = 2b + 18$.
ii. Wir verwenden, dass D_b invertierbar ist genau dann wenn die Determinante $\neq 0$ ist. Daher folgt aus i. dass D_b invertierbar ist für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$.
iii. Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung $x = 0$, also gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Falls $b \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$ haben wir gesehen, dass D_b invertierbar ist, und daher ist die Lösung $x = 0$ eindeutig. Für $b = -9$ gibt es einen Eigenvektor zum Eigenwert 0, der somit einen eindimensionalen Lösungsraum aufspannt (mit unendlich vielen Lösungen).

3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2019) **[17 Punkte]**

(a) [**3 Punkte**] Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung (DGL):

$$y'(x) = y(x)(x^2 + 1). \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (1) mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ mittels Trennung der Variablen.

Lösung:

Mittels Separation der Variablen erhalten wir

$$\frac{1}{y}dy = (x^2 + 1)dx.$$

Dann durch Integration

$$\log|y| = \frac{x^3}{3} + x + K \qquad \Longrightarrow \qquad y = \tilde{K}\exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right),$$

für Konstanten $K, \tilde{K} \in \mathbb{R}$. Mittels Anfangswert erhalten wir

$$\tilde{K} = 2,$$

deshalb ist die Lösung

$$y = 2\exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

(b) [**3 Punkte**]

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 1.Ordnung

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - 1}{x}$$

mithilfe der Trennung der Variablen.

Lösung:

Wir stellen die Gleichung um

$$\frac{y'(x)}{y^2(x) - 1} = \frac{1}{x}$$

und erhalten durch die Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + K$$

für eine Konstante $K \in \mathbb{R}$. Mithilfe der Partialbruchzerlegung berechnen wir das linke Integral und erhalten

$$\frac{1}{2}(\log|y-1|-\log|y+1|)=\log|x|+K \Rightarrow \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=2\log|x|+c \Rightarrow \frac{y-1}{y+1}=\tilde{c}x^2,$$

für eine Konstante $\tilde{c}\in\mathbb{R}$. Umstellen nach y führt zur Lösung

$$y(x)=\frac{1+\tilde{c}x^2}{1-\tilde{c}x^2},$$

für eine Konstante $\tilde{c}\in\mathbb{R}$.

(c) [**4 Punkte**] Man betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x)-y(x)=e^{2x}+e^{x}. \tag{2}$$

Finden Sie die allgemeine Lösung von (2) mithilfe der Variation der Konstanten.
Lösung:

Zunächst lösen wir die homogene Gleichung und erhalten

$$y'(x)=y(x)\Rightarrow y(x)=Ke^{x},\ K\in\mathbb{R}.$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten setzen wir

$$y(x)=K(x)e^{x}$$

in die Ausgangsgleichung ein und erhalten

$$K'(x)e^{x}+K(x)e^{x}-K(x)e^{x}=e^{2x}+e^{x}\Rightarrow K'(x)=e^{x}+1\Rightarrow K(x)=e^{x}+x+c,$$

für eine Konstante $c\in\mathbb{R}$. Folglich ist die Lösung gegeben als

$$y(x)=K(x)e^{x}=e^{2x}+xe^{x}+ce^{x},$$

für eine Konstante $c\in\mathbb{R}$.

(d) [**7 Punkte**]
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems 2.Ordnung

$$\begin{cases} y''(x)+3y'(x)+2y(x)=4x^2+12x+6,\\ y(0)=0,\\ y'(0)=1.\end{cases} \tag{3}$$

Lösung:

Zunächst lösen wir das homogene Gleichungssystem

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Hierfür müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ausrechnen. Es gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \to \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$$

woraus die homogene Lösung

$$y_{\mathbf{hom}}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

folgt. Für die inhomogene Gleichung betrachten wir den Ansatz

$$y_{\mathbf{inh}}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6$$

ergibt

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 4x^2 + 12x + 6,$$

und folglich mit dem Koeffizientenvergleich

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2,\ 12 + 2B = 12 \Rightarrow B = 0,\ 4 + 2C = 6 \Rightarrow C = 1 \Longrightarrow y_{\mathbf{inh}}(x) = 2x^2 + 1.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_{\mathbf{hom}}(x) + y_{\mathbf{inh}}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 2x^2 + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für das Einsetzen der Nebenbedingungen brauchen wir zunächst die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} - c_2 e^{-x} + 4x.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ 1 = y'(0) = -2c_1 - c_2. \end{cases} \tag{4}$$

Das addieren der beiden Gleichungen ergibt $c_1 = 0$ und folglich $c_2 = -1$.
Die Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = 2x^2 - e^{-x} + 1.$$