

# Wahrscheinlichkeit & Statistik

## Quiz 11

### Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Schätzern und deren Eigenschaften. Die Übungen mit (\*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter  
<https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/>

---

1. Eddy schlägt Sophie ein Spiel vor: Er wirft eine Münze solange, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Angenommen beim  $k$ -ten Wurf fällt das erste Mal Kopf. Wenn  $k \geq 3$ , bekommt er von Sophie  $k$  CHF. Wenn  $k \in \{1, 2\}$ , bekommt Sophie von ihm  $k$  CHF.

Was ist Sophies erwarteter Gewinn, wenn die Münze gezinkt ist (Kopf mit Wahrscheinlichkeit  $p$ )?  
*Tipp: Der Erwartungswert einer  $\text{Geom}(p)$ -verteilten Zufallsvariable ist  $1/p$ .*

- (a)  $\frac{2p^2-1}{p}$
- (b)  $\frac{6p^2-4p^3-1}{p}$
- (c)  $\frac{3p^2-2p^3-1}{p}$

2. Wir betrachten weiterhin das gleiche Spiel. Sophie weiss nicht, ob die Münze gezinkt ist, und bittet Eddy, die Münze *vorab* einige Male zu werfen, bis insgesamt 5 Mal Kopf gefallen ist. Sie beobachtet die Ergebnisse der Münzwürfe

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1

und notiert sich die Daten

2, 3, 1, 4, 2

also wie lange es jeweils bis zum nächsten Mal Kopf gedauert hat. Sophie betrachtet die Daten als realisierte Werte von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_5$ . Welcher Parameterraum  $\Theta$  und welche Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  eignen sich in diesem Fall?

- (a) Parameterraum  $\Theta = [0, 1]$  und Wahrscheinlichkeitsmasse  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , sodass  $X_1, \dots, X_5$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabhängig, identisch verteilt sind mit  $X_i \sim \text{Geom}(\theta)$ .
- (b) Parameterraum  $\Theta \in (0, +\infty)$  und Wahrscheinlichkeitsmasse  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , sodass  $X_1, \dots, X_5$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabhängig, identisch verteilt sind mit  $X_i \sim \text{Geom}(\theta)$ .
- (c) Parameterraum  $\Theta \in (0, +\infty)$  und Wahrscheinlichkeitsmasse  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , sodass  $X_1, \dots, X_5$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabhängig, identisch verteilt sind mit  $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$ .

**3.** Wir betrachten jetzt ein anderes Modell mit  $\Theta = \mathbb{N}$ . Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen. Wir wählen die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , sodass  $X_1, \dots, X_n$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabhängig, identisch verteilt sind mit  $X_i \sim \text{Bin}(\theta, 1/2)$ , sodass  $X_i$  Werte in  $\{0, 1, \dots, \theta\}$  nimmt. Welche der folgenden Schätzer sind erwartungstreu?

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a)  $T_1 = X_1$
- (b)  $T_2 = 2X_1$
- (c)  $T_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- (d)  $T_4 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Der mittlere quadratische Schätzfehler (*mean squared error*) eines Schätzers  $T$  ist definiert durch

$$\text{MSE}_\theta[T] = E_\theta[(T - \theta)^2] = E_\theta[T - \theta]^2 + \text{Var}[T],$$

wobei  $\theta$  der wahre Wert des Parameters ist.

**4.** Wir betrachten erneut die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler  $\text{MSE}_\theta[T_1]$  des Schätzers  $T_1 = X_1$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$ ?

- (a)  $\theta$
- (b)  $\frac{\theta + \theta^2}{4}$
- (c)  $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$
- (d)  $\frac{\theta}{n}$

**5.** Wir betrachten erneut die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler  $\text{MSE}_\theta[T_2]$  des Schätzers  $T_2 = 2X_1$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$ ?

- (a)  $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$
- (b)  $\frac{\theta + \theta^2}{4}$
- (c)  $\frac{\theta}{n}$
- (d)  $\theta$

**6.** Wir betrachten erneut die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler  $\text{MSE}_\theta[T_3]$  des Schätzers  $T_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$ ?

- (a)  $\frac{\theta + \theta^2}{4}$
- (b)  $\theta$
- (c)  $\frac{\theta}{n}$
- (d)  $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$

**7.** Wir betrachten erneut die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler  $\text{MSE}_\theta[T_4]$  des Schätzers  $T_4 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$ ?

- (a)  $\frac{\theta}{n}$
- (b)  $\frac{\theta + \theta^2}{4}$
- (c)  $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$
- (d)  $\theta$