Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 12

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Maximum-Likelihood-Schätzern und Testen. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $\Theta = [0, 1]$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Was ist die Likelihood-Funktion $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ für $x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots\}$?

(a) $(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n}$

(b) $\theta^n \cdot (1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n}$

(c) $\theta^n \cdot (1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}$

(d) $(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}$

2. Weiterhin sei $\Theta = [0, 1]$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Was ist die log-Likelihood-Funktion?

(a) $n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta)$

(b) $(x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta)$

(c) $(x_1 + \ldots + x_n) \cdot \log(1-\theta)$

(d) $n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n) \cdot \log(1-\theta)$

3. Weiterhin sei $\Theta = [0, 1]$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ?

(a) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

(b) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n}$

(c) $\frac{X_1+\ldots+X_n+n}{n}$

(d) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n+n}$

4. (*) Sei $\Theta = (0, \infty)$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. Was ist die Likelihood-Funktion $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$?

(a) $e^{-\theta(x_1+\ldots+x_n)}$

(b) $\theta \cdot e^{-\theta(x_1+\ldots+x_n)}$

(c) $\theta^n \cdot e^{-\theta(x_1+\ldots+x_n)}$

(d) $n\theta^n \cdot e^{-\theta(x_1+\ldots+x_n)}$

5. (*) Weiterhin sei $\Theta = (0, \infty)$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. Was ist die log-Likelihood-Funktion für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$?

(a) $-\theta(x_1 + \ldots + x_n)$

(b) $\log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

(c) $\log(n) + n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

(d) $n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

6. (*) Weiterhin sei $\Theta = (0, \infty)$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ?

(a) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n}$

(b) $X_1 + \ldots + X_n$

(c) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

(d) $\frac{1}{X_1+\ldots+X_n}$

7. Sei (T, K) ein Test. Welche Ausagen sind korrekt?

(a) Die Nullhypothese H_0 wird verworfen, falls $T(\omega) \in K$.

(b) Die Nullhypothese H_0 wird akzeptiert, falls $T(\omega) \in K$.

(c) Die Alternativhypothese H_A wird verworfen, falls $T(\omega) \in K$.

(d) T ist eine Zufallsvariable.

(e) K ist ein Zufallsintervall und kann von ω abhängen.

8. Seien $\Theta_0 = \{a, b\}$ und $\Theta_A = \{c, d\}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind. Sei $\alpha \in [0, 1]$. Ein Test (T, K) hat Signifikanzniveau α, falls

(a) $\mathbb{P}_a[T \in K] \leq \alpha$ oder $\mathbb{P}_b[T \in K] \leq \alpha$.

(b) $\mathbb{P}_a[T \in K] \leq \alpha$ und $\mathbb{P}_b[T \in K] \leq \alpha$.

(c) $\mathbb{P}_c[T \in K] \leq \alpha$ oder $\mathbb{P}_d[T \in K] \leq \alpha$.

(d) $\mathbb{P}_c[T \in K] \leq \alpha$ und $\mathbb{P}_d[T \in K] \leq \alpha$.

(e) $\forall \theta \in \{a, b, c, d\} \quad \mathbb{P}_\theta[T \in K] \leq \alpha$.

9. Sei $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ und $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Angenommen der Likelihood-Quotient ist wohldefiniert. Unter welchen Bedingungen gilt die folgende Aussage?
“Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ existiert immer ein Likelihood-Quotient-Test mit Signifikanzniveau exakt α, also $\mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K] = \alpha$.”

(a) Die Ausage gilt, falls $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. diskrete Zufallsvariablen (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) sind.

(b) Die Ausage gilt, falls die Zufallsvariable T stetig (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) ist.

(c) Die Aussage gilt immer.

(d) Die Aussage gilt nie.

10. Seien $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Wir betrachten den Likelihood-Quotient-Test (T, K) mit Parameter $c \geq 0$. Sei $\alpha^* = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K]$ und sei (T', K') ein anderer Test mit Signifikanzniveau $\alpha \leq \alpha^*$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Macht von (T', K') ist immer grösser als die Macht von (T, K).

(b) Der Macht von (T', K') ist immer kleiner als die Macht von (T, K).

(c) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \leq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$

(d) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \geq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$