Prof. Josef Teichmann
David Martins

# Wahrscheinlichkeit & Statistik

## Quiz 3

**Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde**

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, diskreten Verteilungen und deren Erwartungswerten.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
*https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/*

---

**1.** Wir betrachten zwei unabhängige Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
*(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

(a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$

(b) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

(c) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

**2.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $A$ ist unabhängig von sich selbst genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$.

(b) $A$ ist unabhängig von sich selbst genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 1$.

(c) $A$ ist unabhängig von sich selbst genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

(d) $A$ kann nicht unabhängig von sich selbst sein.

**3.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ drei paarweise unabhängige Ereignisse, d.h. $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] \cdot \mathbb{P}[A_j]$ für $1 \leq i \neq j \leq 3$. Folgt es daraus, dass die Ereignisse $A_1, A_2, A_3$ zwangsläufig unabhängig sind?

(a) Ja.

(b) Nein.

**4.** Wir betrachten den Wurf von zwei unabhängigen Würfeln. Der Grundraum ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ und ein Element $\omega \in \Omega$ ist ein Paar $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, wobei die erste Koordinate die Augenzahl des ersten Würfels repräsentiert und die zweite Koordinate die Augenzahl des zweiten Würfels. Wir definieren die Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) = \omega_1, \quad Y(\omega) = (\omega_2)^2, \quad Z(\omega) = \omega_1 - \omega_2.$$

Welche Aussage ist korrekt?

(a) $X$ und $Y$ sind unabhängig.

(b) $X$ und $Z$ sind unabhängig.

(c) $Y$ und $Z$ sind unabhängig.

**5.** Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathbb{P}[X > 5] = 1 - \mathbb{P}[X < 5]$

(b) $\mathbb{P}[X \geq 1 | X \leq 1] = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

(c) $2X \sim \text{Poisson}[2\lambda]$

**6.** Sei $p \in [0, 1]$ und sei $X$ eine Ber($p$)-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$?

(a) $0$

(b) $1 - p$

(c) $p$

(d) $1$

**7.** Sei $p \in [0, 1]$, sei $X$ eine Ber($p$)-verteilte Zufallsvariable und definiere $Y := X^3$. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$?

(a) $1 - p$

(b) $(1 - p)^3$

(c) $p$

(d) $p^3$

**8.** Sei $p \in [0,1]$, sei $X$ eine Ber($p$)-verteilte Zufallsvariable und definiere $Z := (2X-1)^2$. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[Z]$?

(a) $1$

(b) $2p-1$

(c) $1-2p$

(d) $0$

**9.** Sei $\lambda > 0$ und sei $X$ eine Poisson($\lambda$)-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$?

(a) $1$

(b) $1/\lambda$

(c) $\lambda$

(d) $\lambda^2$

**10.** Sei $\lambda > 0$, sei $X$ eine Poisson($\lambda$)-verteilte Zufallsvariable und sei $Y := X^2$. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$?

(a) $\lambda$

(b) $\lambda^2$

(c) $1/\lambda^2$

(d) $\lambda(\lambda+1)$

**11.** Sei $X$ die Anzahl der Einsen, die in 10 unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel geworfen wird. Welche Verteilung kommt für $X$ in Frage?

(a) Bernoulli verteilt mit Parameter $p = 1/6$.

(b) Geometrisch verteilt mit Parameter $p = 1/6$.

(c) Binomialverteilt mit Parameter $n = 10$ und $p = 1/6$.

(d) Poisson verteilt mit Parameter $\lambda = 5/3$.

**12.** Eine Firma erhält eine grosse Lieferung von 10 verschiedenen Materialien. Aus Erfahrung wissen wir, dass im Schnitt 5% der Materialien mangelhaft sind. Nehme an, dass die Materialien unabhängig voneinander sind. Dann gilt:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^8 (1-0.05)^2.$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1-0.05)^8.$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1-0.05)^8.$$