Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 8

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit gemeinsamen Verteilungen stetiger Zufallsvariablen sowie mit bedingten Verteilungen. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}$. Welche Aussage ist korrekt?

(a) Die Zufallsvariablen X und Y sind immer stetig.

(b) Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht notwendigerweise stetig. Dies hängt von $f_{X,Y}$ ab.

2. Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Dichte f_X resp. f_Y. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Zufallsvariablen X und Y haben immer eine gemeinsame Dichte.

(b) Die Zufallsvariablen X und Y haben nicht notwendigerweise eine gemeinsame Dichte.

(c) Wenn X und Y unabhängig sind, dann haben die Zufallsvariablen X und Y eine gemeinsame Dichte.

3. Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Viereck mit Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ und Flächeninhalt $A > 0$. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = c \cdot \mathbb{1}_{(x,y)\in R}.$$

Was gilt für die Konstante c?

(a) $c = 1$.

(b) $c = A$.

(c) $c = A^{-1}$.

4. (*) Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \quad -2 \leq y \leq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f(x,y)$ eine gemeinsame Dichte von zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y?

(a) Es kann keine Aussage gemacht werden.

(b) Nein.

(c) Ja.

5. (*) Seien $(X_i)_{i=1}^n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_{X_i} = F$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $M := \max(X_1, \ldots, X_n)$?

(a) $F_M(a) = F(a)^n$

(b) $F_M(a) = 1 - F(a)^n$

(c) $F_M(a) = (1 - F(a))^n$

6. Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die bedingte Dichte von X_2 gegeben X_1?

(a) $f_{X_2|X_1}(y \mid x) = \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$ für $x \in [0,1]$.

(b) $f_{X_2|X_1}(y \mid x) = x\mathbb{1}_{y \in [0,1]}$ für $x \in [0,1]$.

(c) $f_{X_2|X_1}(y \mid x) = 2y\mathbb{1}_{y \in [0,1]}$ für $x \in [0,1]$.

7. Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die gemeinsame Dichte von X_1 und $Y = X_1 + X_2$?

(a) $f_{X_1,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{x \in [0,1]}\mathbb{1}_{y+x \in [0,1]}$.

(b) $f_{X_1,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{x \in [0,1]}\mathbb{1}_{y-x \in [0,1]}$.

(c) $f_{X_1,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{x \in [0,1]}\mathbb{1}_{y+x \in [0,1]}$.

(d) $f_{X_1,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{x \in [0,1]}\mathbb{1}_{y-x \in [0,1]}$.

8. (*) Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die Dichte von $Y = X_1 + X_2$?

(a) $f_Y(y) = \frac{\mathbb{1}_{y \in [0,2]}}{2}$.

(b) $f_Y(y) = y\mathbb{1}_{y \in [0,1]} + (1+y)\mathbb{1}_{y \in (1,2]}$.

(c) $f_Y(y) = y\mathbb{1}_{y \in [0,1]} + (2-y)\mathbb{1}_{y \in (1,2]}$.

9. Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die bedingte Dichte von $Y = X_1 + X_2$ gegeben X_1?

(a) $f_{Y|X_1}(y \mid x) = y\mathbb{1}_{y\in[x,x+1]}$ für $x \in [0,1]$.

(b) $f_{Y|X_1}(y \mid x) = \mathbb{1}_{y\in[0,1]}$ für $x \in [0,1]$.

(c) $f_{Y|X_1}(y \mid x) = 2(y-x)\mathbb{1}_{y\in[x,x+1]}$ für $x \in [0,1]$.

(d) $f_{Y|X_1}(y \mid x) = \mathbb{1}_{y\in[x,x+1]}$ für $x \in [0,1]$.

10. Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die gemeinsame Dichte von $Y = X_1 + X_2$ und $Z = X_1 - X_2$?

(a) $f_{Y,Z}(y,z) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{y+z\in[0,2]}\mathbb{1}_{z-y\in[0,2]}$.

(b) $f_{Y,Z}(y,z) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{y+z\in[0,2]}\mathbb{1}_{y-z\in[0,2]}$.

(c) $f_{Y,Z}(y,z) = 2\mathbb{1}_{y+z\in[0,2]}\mathbb{1}_{y-z\in[0,2]}$.

(d) $f_{Y,Z}(y,z) = 2\mathbb{1}_{y+z\in[0,2]}\mathbb{1}_{z-y\in[0,2]}$.

11. (*) Seien $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die bedingte Dichte von $Z = X_1 - X_2$ gegeben $Y = X_1 + X_2$?

(a) $f_{Z|Y}(z \mid y) = \mathbb{1}_{y\leq 1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-2+y,2-y]}}{2y} + \mathbb{1}_{y>1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-y,y]}}{4-2y}$.

(b) $f_{Z|Y}(z \mid y) = \mathbb{1}_{y\leq 1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-y,y]}}{2y} + \mathbb{1}_{y>1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-2+y,2-y]}}{4-2y}$.

(c) $f_{Z|Y}(z \mid y) = \mathbb{1}_{y\leq 1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-2+y,2-y]}}{4-2y} + \mathbb{1}_{y>1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-y,y]}}{2y}$.

(d) $f_{Z|Y}(z \mid y) = \mathbb{1}_{y\leq 1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-y,y]}}{4-2y} + \mathbb{1}_{y>1}\frac{\mathbb{1}_{z\in[-2+y,2-y]}}{2y}$.