

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 9

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit dem Gesetz der grossen Zahlen und mit dem zentralen Grenzwertsatz. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
<https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/>

1. Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von Zufallsvariablen. Unter welchen Bedingungen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E[X_1] \text{ fast sicher?}$$

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a) Dies gilt für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|X_1|] < \infty$.
- (b) Dies gilt für identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|X_1|] < \infty$.
- (c) Dies gilt für unabhängige Zufallsvariablen mit $E[|X_1|] < \infty$.
- (d) Dies gilt für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

2. Sei U_1, U_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $U_1 \sim \mathcal{U}([-2, 1])$. Welche Aussage ist korrekt?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = 1/2$ fast sicher.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = -1/2$ fast sicher.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i = 1/2$ fast sicher.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i = -1/2$ fast sicher.

3. Sei T_1, T_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_1 \sim \text{Exp}(4)$. Welche Aussage ist korrekt?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{2i} = 4$ fast sicher.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n T_{2i} = 4$ fast sicher.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{2i} = 1/4$ fast sicher.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n T_{2i} = 1/4$ fast sicher.

4. Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 1] = 3/4.$$

Welche Aussage ist korrekt?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$ fast sicher.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$ fast sicher.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$ fast sicher.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$ fast sicher.

5. Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Sei Z eine $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable. Wir definieren $m := \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (b) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \leq a\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (c) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \leq a\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (d) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.

6. Sei T_1, T_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_1 \sim \text{Exp}(4)$. Welche Aussage ist korrekt?

- (a) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \lambda \cdot (n + a\sqrt{n})\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (b) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{n+a\sqrt{n}}{\lambda}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (c) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \lambda a\sqrt{n}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.
- (d) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{a\sqrt{n}}{\lambda}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \forall a \in \mathbb{R}$.

7. Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X = -1] = 1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = 1/2.$$

Welche Aussagen sind korrekt?

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq n^{1/4}\right] = 1$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq n^{1/2}\right] = 1$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq n^{3/4}\right] = 1$.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq n\right] = 1$.