

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 10

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit dem zentralen Grenzwertsatz und Ungleichungen. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
<https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/>

1. Sei $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$, wobei $n \in \mathbb{N}$ gross ist. Welche dieser Annäherungen stimmt?

✓ (a) $X \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(n/2, n/4)$

Richtig!

(b) $X \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \text{Poi}(n/2)$

Leider nicht.

(c) $X \stackrel{\text{approx.}}{=} n/2$

Leider nicht.

Es gilt $X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n Y_k$, wobei Y_1, \dots, Y_n unabhängig und identisch verteilt sind mit $Y_k \sim \text{Ber}(1/2)$. Aus dem Zentralen Grenzwertsatz erhalten wir, dass

$$Z := \frac{\sum_{k=1}^n Y_k - n/2}{\sqrt{n}/2} \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

Da $X \stackrel{d}{=} \frac{\sqrt{n}}{2} Z + \frac{n}{2}$ können wir schreiben $X \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(n/2, n/4)$.

2. Sei $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2n})$, wobei $n \in \mathbb{N}$ gross ist. Welche dieser Annäherungen stimmt?

(a) $X \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(1/2, 1/4)$

Leider nicht.

✓ (b) $X \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \text{Poi}(1/2)$

Richtig!

(c) $X \stackrel{\text{approx.}}{=} 1/2$

Leider nicht.

Dies ist das Beispiel von s.42 im Skript von M. Schweizer.

3. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Was ist $E[\exp(\lambda X)]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$?

(a) $\exp(\sigma\lambda)$

Leider nicht.

(b) $\exp(2\sigma\lambda)$

Leider nicht.

✓ (c) $\exp(\sigma^2\lambda^2/2)$

Richtig!

(d) $\exp(\sigma^2\lambda^2)$

Leider nicht.

Es gilt

$$\begin{aligned} E[\exp(\lambda X)] &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\lambda x - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= e^{\sigma^2\lambda^2/2} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma^2\lambda)^2}{2\sigma^2}\right) dx = e^{\sigma^2\lambda^2/2}, \end{aligned}$$

denn $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \sigma^2\lambda)^2}{2\sigma^2}\right)$ ist die Dichte der Verteilung $\mathcal{N}(\sigma^2\lambda, \sigma^2)$.

4. Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E[X] = \mu$. Welche der folgenden Ungleichungen gilt?

(a) $P[X \leq c] \leq \frac{c}{\mu}$ für $c > 0$.

Leider nicht.

(b) $P[X \leq c] \leq \frac{\mu}{c}$ für $c > 0$.

Leider nicht.

(c) $P[X \geq c] \leq \frac{c}{\mu}$ für $c > 0$.

Leider nicht.

✓ (d) $P[X \geq c] \leq \frac{\mu}{c}$ für $c > 0$.

Richtig!

Es gilt

$$E[X] = E[X1_{\{X < c\}} + X1_{\{X \geq c\}}] \geq 0 + cP[X \geq c],$$

sodass $P[X \geq c] \leq E[X]/c = \mu/c$. Dies ist die Markow-Ungleichung (manchmal auch Chebyshev-Ungleichung genannt).

5. Welchen der folgenden Schranken gelten für $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

✓ (a) $P[X \geq x] \leq \frac{\sigma^2}{x^2}$ für $x > 0$.

Richtig!

(b) $P[X \geq x] \leq \frac{x^2}{\sigma^2}$ für $x > 0$.

Leider nicht.

✓ (c) $P[X \geq x] \leq e^{\sigma^2/2-x}$ für $x > 0$.

Richtig!

✓ (d) $P[X \geq x] \leq e^{2(\sigma^2-x)}$ für $x > 0$.

Richtig!

(a) folgt aus der Chebyshev-Ungleichung, und (c) und (d) folgen aus der Markov-Ungleichung (Frage 4) bzw. mit $Y = \exp(X)$ und $Y = \exp(2X)$. Generell haben wir

$$P[X \geq x] = P[\exp(\lambda X) \leq \exp(\lambda x)] \leq \frac{\exp(\sigma^2 \lambda^2 / 2)}{\exp(\lambda x)} = \exp(\sigma^2 \lambda^2 / 2 - \lambda x)$$

für $\lambda \geq 0$.