Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 1

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums und den Eigenschaften von σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsmassen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Bei einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Beide Münzen können "Kopf" (K) oder "Zahl" (Z) zeigen. Wir wollen nun einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Spiel betrachten. Was ist ein möglicher Grundraum Ω? (Hier bedeutet z.B. (Z, K), dass die eine Münze "Zahl" und die andere Münze "Kopf" zeigt.)

(a) $\Omega = \{(K, K), (Z, K), (Z, Z)\}$

Leider nicht. Die Elementarereignisse (Z, K) und (K, Z) sind unterschiedlich. In dieser falschen Lösung wurde also ein Elementarereignis weggelassen und deshalb ist Ω nicht der ganze Grundraum.

√ (b) $\Omega = \{(K, K), (Z, K), (K, Z), (Z, Z)\}$

Richtig! Der Grundraum umfasst alle möglichen Elementarereignisse, d.h., alle Ausgänge des Zufallsexperiments (= Werfen von zwei Münzen). Eine Münze kann zwei Werte zeigen; die andere Münze kann auch zwei Werte zeigen. Insgesamt gibt es also $2 \times 2 = 4$ mögliche Elementarereignisse. Alle Elementarereignisse zusammen bilden den Grundraum.

(c) $\Omega = \{K, Z\}$

Leider nicht. Obiges Ω beschreibt den Ausgang von einem Münzwurf, aber nicht von zwei Münzwürfen.

2. Zu obigem Grundraum wählen wir die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Wir wollen nun das Ereignis beschreiben, dass mindestens eine der beiden Münzen Zahl zeigt. Welches Element A von $\mathcal{F}$ entspricht diesem Ereignis?

(a) $\{(Z, Z)\}$

(b) $\{(K, Z), (Z, K)\}$

√ (c) $\{(Z, K), (K, Z), (Z, Z)\}$

(d) $\{(K, K), (Z, K), (K, Z), (K, K)\}$

Bei den Elementarereignisse (Z, K), (K, Z) und (Z, Z) zeigt mindestens eine der Münzen Zahl.

3. Zu obigem Grundraum wählen wir die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Betrachte nun das Ereignis $A = \{(Z,K),(K,Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen") und das Ereignis $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$ ("mindestens einmal Kopf"). Was ist die Schnittmenge $A \cap B$?

$\surd$ (a) $\{(Z,K),(K,Z)\}$

(b) $\{(K,K),(Z,Z)\}$

(c) $\{(Z,Z)\}$

(d) $\{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$

Die beiden Elementarereignisse (Z,K), (K,Z) sind als Einzige sowohl in A als auch in B enthalten. Sie bilden somit die Schnittmenge.

4. Betrachte wieder das Ereignis $A = \{(Z,K),(K,Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen") und das Ereignis $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$ ("mindestens einmal Kopf"). Was ist die Vereinigung $A \cup B$?

(a) $\{(Z,K)\}$

(b) $\{(K,K),(Z,Z)\}$

(c) $\{(Z,Z)\}$

$\surd$ (d) $\{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$

Die Vereinigung umfasst alle Elementarereignisse, die in A oder in B enthalten sind.

5. Betrachte wieder das Ereignis $A = \{(Z,K),(K,Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen"). Was ist das Komplement von A: A^c?

(a) $\{(Z,K)\}$

$\surd$ (b) $\{(K,K),(Z,Z)\}$

(c) $\{(Z,Z)\}$

(d) $\{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$

Das Komplement von A umfasst alle Elementarereignisse aus dem Grundraum Ω, die nicht in A enthalten sind.

6. In obigem Beispiel mit den Münzwürfen ist jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich (weil es sich um faire Münzen handelt). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$ ("mindestens einmal Kopf") eintritt?

$\surd$ (a) $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$

(b) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

Das Ereignis B besteht aus folgenden Elementarereignissen: $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$. Es gibt also drei Elementarereignisse, bei denen das Ereignis B eintritt ("Anzahl günstige Fälle"). Der Grundraum besteht insgesamt aus vier Elementarereignissen ("Anzahl mögliche Fälle"). Weil alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, ergibt das Verhältnis "Anzahl günstige Fälle/Anzahl mögliche Fälle" die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt.

7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B in $\mathcal{F}$. Ist die Aussage "$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ gilt immer." richtig oder falsch?

(a) Diese Aussage ist richtig.

√ (b) Diese Aussage ist falsch.

Die Aussage stimmt nur dann, wenn die Schnittmenge $A \cap B$ leer ist. Allgemein gilt $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von Ω.

Leider nicht, $\mathcal{F}$ ist keine Teilmenge von Ω. Aus der Vorlesung wissen wir, dass Ω per Definition der σ-Algebra immer ein Element von $\mathcal{F}$ ist.

(b) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von $\Omega \times \Omega$.

Leider nicht, $\mathcal{F}$ ist keine Teilmenge von Ω. Aus der Vorlesung wissen wir, dass Ω per Definition der σ-Algebra immer ein Element von $\mathcal{F}$ ist.

√ (c) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$.

Richtig! $\mathcal{F}$ ist gemäss Definition eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω, die mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet wird.

9. Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. In welchen der folgenden Fälle ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$

(b) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Leider nicht! Gegenbeispiel: Das Mengensystem enthält die Menge $\{1\}$, aber nicht ihr Komplement $\{2, 3\}$.

√ (c) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(d) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

Leider nicht! Gegenbeispiel: Das Mengensystem enthält die Menge $\{1\}$, aber nicht ihr Komplement $\{2, 3\}$.

(e) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Leider nicht! Gegenbeispiel: Das Mengensystem enthält die Menge $\{1, 2\}$, aber nicht ihr Komplement $\{3\}$.

√ (f) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

10. Sei $\Omega = \{0,1\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. In welchen Fällen erfüllt die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses auf $(\Omega, \mathcal{F})$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{0,1\}] = \frac{1}{4}$

Leider nicht. Für ein Wahrscheinlichkeitsmass würde $\mathbb{P}[\{0,1\}] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$ gelten, was hier nicht erfüllt ist.

(b) $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = 0$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$.

Leider nicht. Für ein Wahrscheinlichkeitsmass würde $\mathbb{P}[\{0\}] + \mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{0,1\}]$ gelten, was hier nicht erfüllt ist. (Die Mengen $\{0\}$ und $\{1\}$ sind disjunkt.)

√ (c) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$.

Richtig! $\mathbb{P}$ erfüllt alle Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses.

(d) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = \frac{3}{4}$.

Leider nicht. Für ein Wahrscheinlichkeitsmass würde $\mathbb{P}[\{0,1\}] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$ gelten, was hier nicht erfüllt ist.

11. Sei $n \geq 2$. Zur Modellierung von n Würfen eines Würfels betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}[\omega] = \frac{1}{6^n}$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $1 \leq i \leq 6$ definieren wir die Ereignisse

$$A_i = \{\text{Der Würfel zeigt bei mindestens einem Wurf die Augenzahl } i.\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[A_1] = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

Leider nicht. Insgesamt gibt es 6^n Elementarereignisse, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Anzahl der Elementarereignisse, bei denen die Augenzahl 1 bei keinem der n Würfe auftritt, ist 5^n. Hieraus folgt $\mathbb{P}[(A_1)^c] = \frac{5^n}{6^n}$ und somit $\mathbb{P}[A_1] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

√ (b) $\mathbb{P}[A_2] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Richtig! Insgesamt gibt es 6^n Elementarereignisse, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Anzahl der Elementarereignisse, bei denen die Augenzahl 2 bei keinem der n Würfe auftritt, ist 5^n. Hieraus folgt $\mathbb{P}[(A_2)^c] = \frac{5^n}{6^n}$ und somit $\mathbb{P}[A_2] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

(c) $\mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_4] = \mathbb{P}[A_3 \cup A_4]$

Leider nicht. Es gilt $\mathbb{P}[A_3 \cup A_4] = \mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_4] - \mathbb{P}[A_3 \cap A_4]$ und die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge $A_3 \cap A_4$ ist nicht gleich null, da $\omega = (3, 4, \dots) \in A_3 \cap A_4$.

√ (d) $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6] = 1$

Richtig! Bei jedem Wurf zeigt der Würfel die Augenzahl 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 und somit gilt $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$. Entsprechend gilt $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$.

√ (e) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_1] = 1$

Richtig! Dies folgt direkt aus Teilaufgabe (b), da $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \to 1$ für $n \to \infty$.