Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 2

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit σ-algebren, bedingten Wahrscheinlichkeiten und der Definition des Erwartungswerts diskreter Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B in $\mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass A eine echte Teilmenge von B ist, d.h. $A \subset B$ und $A \neq B$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

√ (a) $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$, aber (b) gilt im Allgemeinen nicht.

Richtig! Dies ist die Monotonizität des Wahrscheinlichkeitsmasses $\mathbb{P}$.

(b) $\mathbb{P}[A] < \mathbb{P}[B]$

Dies ist im Allgemeinen leider falsch. Beispiel: Wir betrachten eine gezinkte Münze, die immer auf "Kopf" (K) und nie auf "Zahl" (Z) fällt. Dieses Zufallsexperiment können wir mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ beschreiben, wobei $\Omega = \{K, Z\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{K\}] = 1$ und $\mathbb{P}[\{Z\}] = 0$. Für die Ereignisse $A = \{K\}$ ("Die Münze zeigt Kopf.") und $B = \{K, Z\}$ ("Die Münze zeigt Kopf oder Zahl.") gilt $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$, obwohl A eine echte Teilmenge von B ist.

(c) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$, aber (d) gilt im Allgemeinen nicht.

Leider nicht. Die Ungleichung geht in die andere Richtung.

(d) $\mathbb{P}[A] > \mathbb{P}[B]$

Leider nicht.

2. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $(A_n)_{n\geq 1}$ Elemente von $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

√ (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

√ (b) $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \in \mathcal{F}$

√ (c) $(A_2)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$

√ (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

3. Wir betrachten zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$. Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$ definiert?

(a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A \cap B]$

√ (b) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

(c) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[A]}$

(d) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[A\cup B]}$

4. Unter welchen Annahmen gilt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]\,?$$

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Formel gilt für alle Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$.

(b) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

(c) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

√ (d) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, und die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

5. Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{“Augenzahl des ersten Würfels”}$$

$$Y : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_2 \end{cases} \qquad \text{“Augenzahl des zweiten Würfels”}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{“Augensumme der beiden Würfel”}$$

Welche Werte kann S annehmen (mit positiver Wahrscheinlichkeit)?

(a) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 12\}$ an.

Leider nicht. Der Wert 1 wird nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen, da das kleinstmögliche Ergebnis $1 + 1 = 2$ ist.

√ (b) S nimmt Werte in $\{2, \dots, 12\}$ an.

Richtig!

(c) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 6\}^2$ an.

Leider nicht. S ist eine Zahl, kein Tupel.

6. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9 | Y = 3]$?

(a) 0

(b) 1/36

√ (c) 1/6

(d) 1/4

Per Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir $\mathbb{P}[S = 9 | Y = 3] = \frac{\mathbb{P}[\{S=9\} \cap \{Y=3\}]}{\mathbb{P}[Y=3]}$. Weiterhin gilt $\{S = 9\} \cap \{Y = 3\} = \{X = 6\} \cap \{Y = 3\}$, denn wenn der zweite Würfel die Augenzahl 3 zeigt, so kann die Summe der Augensumme der beiden Würfel nur dann 9 sein, wenn der erste Würfel die Augenzahl 6 zeigt. Wir erhalten also

$$\mathbb{P}[S = 9 | Y = 3] = \frac{\mathbb{P}[\{X = 6\} \cap \{Y = 3\}]}{\mathbb{P}[Y = 3]} = (1/36)/(1/6) = 1/6.$$

7. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9]$?

(a) 1/12

√ (b) 1/9

(c) 1/6

(d) 1/4

Wir verwenden die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Proposition 1.16) und erhalten

$$\mathbb{P}[S = 9] = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}[S = 9|Y = i] \cdot \mathbb{P}[Y = i] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}[S = 9|Y = i] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Hierbei haben wir verwendet, $\mathbb{P}[S = 9|Y = i] = 0$ für $i = 1, 2$ und $\mathbb{P}[S = 9|Y = i] = 1/6$ für $i = 3, 4, 5, 6$.

8. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[Y = 3|S = 9]$?

(a) 0

(b) 1/36

(c) 1/6

√ (d) 1/4

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\mathbb{P}[Y = 3|S = 9] = \frac{\mathbb{P}[\{Y = 3\} \cap \{S = 9\}]}{\mathbb{P}[S = 9]} = \mathbb{P}[S = 9|Y = 3] \cdot \frac{\mathbb{P}[Y = 3]}{\mathbb{P}[S = 9]} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}.$$

9. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$?

(a) Die Linearität des Erwartungswerts gilt für beliebige Zufallsvariablen.

Leider nicht. $\mathrm{E}[X + Y]$, $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$ müssen wohldefiniert sein.

√ (b) Die Linearität des Erwartungswerts gilt für beliebige Zufallsvariablen, solange $\mathrm{E}[X + Y]$, $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$ wohldefiniert sind.

Richtig!

(c) Die Linearität des Erwartungswerts gilt nur, wenn X und Y unabhängig sind.

Leider nicht. Es ist nicht notwendig, dass X und Y unabhängig sind.

10. Sei X eine beliebige Zufallsvariable, die n verschiedene Werte $x_1,\dots,x_n$ annehmen kann. Was ist $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i]$?

(a) 0

√ (b) 1

(c) ∞

(d) 0.5

(e) -1

Leider nicht! Eine Wahrscheinlichkeit ist immer grösser oder gleich null; also ist auch die Summe von Wahrscheinlichkeiten grösser oder gleich null. Die Antwort scheidet daher aus.

(f) Kann man ohne weitere Angaben nicht lösen!

Aus der Additivität des Wahrscheinlichkeitsmasses erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right] = \mathbb{P}[\Omega] = 1.$$

11. Sei X eine Zufallsvariable, die Werte in $\{0, 1, 2, \dots\}$ annimmt. Welche der folgenden Ausdrücke sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k]$

Leider nicht. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = 1$, was nicht notwendigerweise dem Erwartungswert entspricht.

√ (b) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k]$

Richtig! Dies ist die Formel für den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable.

√ (c) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]$

Richtig! Dies ist die Tailsum Formel für Zufallsvariablen, die Werte in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ annehmen.

(d) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]$

Leider nicht. Für die Tailsum Formel ist es wichtig, dass die Summe bei $k = 1$ beginnt. Gegenbeispiel: Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. Dann gilt $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$ und somit $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k] = 1$, obwohl $\mathrm{E}[X] = 0$.