Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 4

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, diskreten Verteilungen und bedingten Erwartungswerten.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine Partition von Ω. Wir nehmen an, dass $P[\{\omega\}] > 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = X$ für alle Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$?

√ (a) Nur wenn $|B_i| = 1$ für alle $i \in I$.

(b) Nur wenn $B_1 = \Omega$ und $I = \{1\}$.

(c) Es ist nicht möglich.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine Partition von Ω. Wir nehmen an, dass $P[\{\omega\}] > 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher für alle Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$?

(a) Nur wenn $|B_i| = 1$ für alle $i \in I$.

√ (b) Nur wenn $B_1 = \Omega$ und $I = \{1\}$.

(c) Es ist nicht möglich.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine Partition von Ω. Wir nehmen an, dass $P[\{\omega\}] > 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = X$?

√ (a) Nur wenn $|X(B_i)| = 1$ für alle $i \in I$.

(b) Nur wenn $|B_i| = 1$ für alle $i \in I$.

(c) Nur wenn $B_1 = \Omega$ und $I = \{1\}$.

(d) Es ist nicht möglich.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in I}$ eine Partition von Ω. Wir betrachten Zufallsvariablen X, Y mit $\mathbb{E}[X^2 + Y^2] < \infty$. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{E}[X + Y \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] + \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}]$?

(a) Nur wenn $|B_i| = 1$ für alle $i \in I$.

(b) Nur wenn $B_1 = \Omega$ und $I = \{1\}$.

(c) Nur wenn X und Y unabhängig sind.

√ (d) Es gilt immer.

5. Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{“Augenzahl des ersten Würfels”}$$

$$Y : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_2 \end{cases} \qquad \text{“Augenzahl des zweiten Würfels”}$$

Betrachte die Partition $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\{1\dots,6\}}$ wobei $B_i = \{Y = i\}$. Was ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}](2, 4)$?

(a) 2.

(b) 4.

(c) 3.

√ (d) 3.5.

Es gilt $\mathbb{E}[X \mid B_i] = \mathbb{E}[X] = 3.5$ für jedes i weil X und Y unabhängig sind. Somit ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}](2, 4) = \mathbb{E}[X \mid B_4] = 3.5$.

6. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}](2, 4)$?

(a) 2.

√ (b) 4.

(c) 3.

(d) 3.5.

Es gilt $\mathbb{E}[Y \mid B_i] = i$ für jedes i. Somit ist $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}](2, 4) = \mathbb{E}[Y \mid B_4] = 4$.

7. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{B}](2,4)$?

(a) 7.

(b) 8.

(c) 12.25.

√ (d) 14.

Es gilt

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{B}](2,4) = \mathbb{E}[XY \mid B_4] = 4\mathbb{E}[X \mid B_4] = 4 \times 3.5 = 14.$$

8. Sei X eine Zufallsvariable und setze $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$. Welche Aussage ist im Allgemeinen korrekt?

(a) $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]$

√ (b) $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$

(c) $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2]$

9. Seien X, Y und Z Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[X^2 + Y^2 + Z^2] < \infty$. Unter welchen Bedingungen gilt $\sigma_{X+Y+Z}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Dies gilt für beliebige Zufallsvariablen.

√ (b) Dies gilt, wenn X, Y und Z paarweise unabhängig sind.

√ (c) Dies gilt, wenn X, Y und Z unabhängig sind.

10. Es seien X und Y unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 > 0$. Was ist die Varianz der Zufallsvariable $Z := 2X - Y$?

(a) σ^2.

(b) $3\sigma^2$.

√ (c) $5\sigma^2$.

Für jede Zufallsvariable $\widetilde{X}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma_{c\widetilde{X}}^2 = \mathrm{E}[(c\widetilde{X} - \mathrm{E}[c\widetilde{X}])^2] = c^2 \cdot \mathrm{E}[(\widetilde{X} - \mathrm{E}[\widetilde{X}])^2] = c^2 \cdot \sigma_{\widetilde{X}}^2.$$

Somit folgt aus der Unabhängigkeit

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{2X-Y}^2 = \sigma_{2X}^2 + \sigma_{-Y}^2 = 2^2\sigma_X^2 + (-1)^2\sigma_Y^2 = 4\sigma^2 + \sigma^2 = 5\sigma^2.$$

11. Sei $p \in [0,1]$, $n \geq 1$ und X eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) $p(1-p)$

(b) np

$\surd$ (c) $np(1-p)$

(d) $n^2p(1-p)$

12. Sei $p \in [0,1]$, sei X eine $\mathrm{Ber}(p)$-verteilte Zufallsvariable und definiere $Z := (2X-1)^2$. Was ist die Varianz σ_Z^2?

(a) 1

(b) $p(1-p)$

(c) p^2

$\surd$ (d) 0

Die ZV Z ist fast sicher konstant (mit Wert 1). Daraus folgt $\sigma_Z^2 = 0$.

13. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine $\mathrm{Poisson}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) 1

(b) $1/\lambda$

$\surd$ (c) λ

(d) λ^2

Wir haben in Quiz 3 $\mathbb{E}[X] = \lambda$ und $\mathbb{E}[X^2] = \lambda(\lambda+1)$ berechnet. Somit gilt

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda.$$

14. Wir betrachten zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y, die Werte in $\{-1, +1\}$ annehmen, und deren Gewichtsfunktionen/Verteilungen durch

$$p_X(-1) = p_X(1) = 1/2 \quad \text{und} \quad p_Y(-1) = p_Y(1) = 1/2$$

gegeben sind. Wir definieren die Zufallsvariable $Z = X \cdot Y$. Welche Aussagen sind korrekt? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

√ (a) Die Zufallsvariablen X und Z sind unabhängig.

Richtig! Wir berechnen die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung von (X, Z):

$$p(-1,-1) = \mathbb{P}[X = -1, Z = X \cdot Y = -1] = \mathbb{P}[X = -1, Y = 1] = 1/4$$

und analog

$$p(-1, 1) = p(1,-1) = p(1, 1) = 1/4.$$

Man überprüft leicht, dass für alle $x, z \in \{-1, 1\}$ gilt $p(x, z) = p_X(x) \cdot p_Z(z)$ (siehe unten für die Berechnung von p_Z) und somit sind X und Z unabhängig.

√ (b) Die Zufallsvariablen Y und Z sind unabhängig.

Richtig! Dies kann man analog zu (a) zeigen.

(c) Die Zufallsvariablen X, Y und Z sind unabhängig.

Leider nicht. Wir betrachten die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung von (X, Y, Z) und stellen fest, dass

$$p(1,-1, 1) = \mathbb{P}[X = 1, Y = -1, Z = 1] = 0 \neq 1/8 = p_X(1) \cdot p_Y(-1) \cdot p_Z(1),$$

wobei wir die Berechnung von p_Z (siehe unten) verwendet haben.

Ergänzend berechnen wir die Gewichtsfunktion/Verteilung von Z:

$$p_Z(1) = \mathbb{P}[X \cdot Y = 1] = \mathbb{P}[X = Y = 1] + \mathbb{P}[X = Y = -1] = 1/4 + 1/4 = 1/2 \quad \text{und} \quad p_Z(-1) = 1/2,$$

wobei wir erneut die Unabhängigkeit von X und Y verwendet haben.