Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 5

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Verteilungsfunktionen und gemeinsamen Gewichtsfunktionen. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Die *Verteilungsfunktion* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von X ist gegeben durch

$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x] \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

(siehe s.30 im Skript von M. Schweizer). Zum Beispiel, die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Was gilt für $a < b$?

(a) $\mathbb{P}[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$

(b) $\mathbb{P}[a \leq X < b] = F_X(b) - F_X(a)$

√ (c) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

(d) $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

Gemäss Definition der Verteilungsfunktion gilt $F_X(b) = \mathbb{P}[X \leq b]$. Hieraus folgt

$$F_X(b) - F_X(a) = \underbrace{\mathbb{P}[X \leq b]}_{=\mathbb{P}[X \leq a] + \mathbb{P}[a < X \leq b]} - \mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[a < X \leq b],$$

wobei wir $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \sqcup \{a < X \leq b\}$ verwendet haben.

2. Sei F eine Verteilungsfunktion. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

$\checkmark$ (a) F ist monoton wachsend.

(b) F ist monoton fallend.

Leider nicht. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die immer den Wert 1 annimmt, erfüllt $F(a) = 0$ für alle $a < 1$ und $F(a) = 1$ für alle $a \geq 1$.

(c) $\lim_{a\to\infty} F(a) = \infty$

Leider nicht. Der Grenzwert ist 1.

(d) $\lim_{a\to 0} F(a) = 0$

Leider nicht. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die immer den Wert -5 annimmt, erfüllt $F(a) = 0$ für alle $a < -5$ und $F(a) = 1$ für alle $a \geq -5$. Insbesondere gilt $F(0) = 1$.

3. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = -1] = 1/4$, $\mathbb{P}[X = 0] = 1/4$ und $\mathbb{P}[X = 1] = 1/2$. Was ist die Verteilungsfunktion F_X?

$\checkmark$ (a)

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 1/4 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 1/2 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(b)

$$F_X(a) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } x = -1, \\ 1/4 & \text{für } x = 0, \\ 1/2 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x \notin \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

(c)

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ (x+1)/2 & \text{für } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Wir erhalten die Verteilungsfunktion, indem wir zunächst feststellen, dass $\mathbb{P}[X \leq b] = 0$ für $b < -1$ gilt. Weiterhin gilt $\mathbb{P}[X \leq b] = \mathbb{P}[X = -1] = 1/4$ für $b \in [-1, 0)$, $\mathbb{P}[X \leq b] = \mathbb{P}[X = -1] + \mathbb{P}[X = 0] = 1/2$ für $b \in [0, 1)$ und $\mathbb{P}[X \leq b] = \mathbb{P}[X = -1] + \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1] = 1$ für $b \in [1, \infty)$

4. (*) Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ a/2 & \text{für } 0 \leq a < 2, \\ 1 & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Welche Aussagen über die Zufallsvariable X sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[X \geq 2] = 1$

$\surd$ (b) $\mathbb{P}[X = 1] = 0$

$\surd$ (c) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1/2$

(d) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1$

$\surd$ (e) $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$

$\surd$ (f) $\mathbb{P}[X \geq 1] = \mathbb{P}[X \leq 1]$

Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit Werten in W_X bzw. W_Y. Die *gemeinsame Gewichtsfunktion* $p_{X,Y} : W_X \times W_Y \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}[X = x, Y = y], \quad \text{für } x \in W_X, y \in W_Y,$$

und die *Randverteilungen* $p_X : W_X \to \mathbb{R}$, $p_Y : W_Y \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x], \quad p_Y(y) = \mathbb{P}[Y = y], \quad \text{für } x \in W_X, y \in W_Y$$

(siehe s.55 im Skript von M. Schweizer). Zum Beispiel, seien $X, Y \sim \mathrm{Ber}(p)$ unabhängig und identisch verteilt. Dann ist

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1-p)^2, & (x, y) = (0, 0), \\ p(1-p), & (x, y) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0), \\ p^2, & (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

5. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen. Welche dieser Formeln ist richtig?

(a) $p_X(x) = \sum_{y \in W_Y} \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$.

$\surd$ (b) $p_X(x) = \sum_{y \in W_Y} p_{X,Y}(x, y)$.

(c) $p_X(x) = \sum_{y \in W_Y} p_Y(y)$.

Es gilt $p_X(x) = \mathbb{P}[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \mathbb{P}[\{X = x\} \cap \{Y = y\}] = \sum_{y \in W_Y} p_{X,Y}(x, y)$.

6. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen. Unter welcher Bedingung ist die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung $p_{X,Y} = (p_{X,Y}(x,y))_{x \in W_X, y \in W_Y}$ von X und Y eindeutig durch die Gewichtsfunktionen der Randverteilungen p_X und p_Y bestimmt?

√ (a) Falls X und Y unabhängig sind.

Richtig! In diesem Fall ist $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$.

(b) Falls X und Y identisch verteilt sind (d.h. $p_X = p_Y$).

Leider nicht. Wir betrachten zwei Beispiele.
1. Sei X Ber(1/2)-verteilt und $Y := X$. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = 1/2$ und $p(1,0) = p(0,1) = 0$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
2. Seien X, Y unabhängig und Ber(1/2)-verteilt. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = p(1,0) = p(0,1) = 1/4$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
Die Gewichtsfunktionen/Verteilungen der Randverteilungen sind in beiden Fällen identisch, die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung unterscheidet sich aber.

(c) Falls X und Y Ber(p)-verteilt sind.

Leider nicht. Wir können die gleichen Beispiele als Gegenbeispiel verwenden.
1. Sei X Ber(1/2)-verteilt und $Y := X$. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = 1/2$ und $p(1,0) = p(0,1) = 0$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
2. Seien X, Y unabhängig und Ber(1/2)-verteilt. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = p(1,0) = p(0,1) = 1/4$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
Die Gewichtsfunktionen/Verteilungen der Randverteilungen sind in beiden Fällen identisch, die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung unterscheidet sich aber.

7. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p_{X,Y}$. Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy$

√ (b) $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy\, p_{X,Y}(x,y)$

(c) $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x \in W_X} xy\, p_{X,Y}(x,y)$

(d) $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy\, p_X(x)p_Y(y)$

Leider nicht. Dies gilt nur, wenn X und Y unabhängig sind.

8. (*) Seien X_1, X_2 und X_3 drei Zufallsvariablen. Welche Aussage ist korrekt?

√ (a) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3] = \mathbb{P}[X_1 \le x_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \le x_2] \cdot \mathbb{P}[X_3 \le x_3].$$

(b) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \le x, X_2 \le x, X_3 \le x] = \mathbb{P}[X_1 \le x] \cdot \mathbb{P}[X_2 \le x] \cdot \mathbb{P}[X_3 \le x].$$