Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 7

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Definition des Erwartungswerts und der Varianz stetiger Zufallsvariabeln und mit wichtigen Beispielen. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable und Y eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_Y. Welche der folgenden unten aufgelisteten Kombinationen können niemals auftreten?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}(X = 3) = 0.3$; $f_Y(0.6) = 1.5$

√ (b) $\mathbb{P}(X = 3) = 1.3$; $f_Y(0.6) = 0.5$

(c) $\mathbb{P}(X = 3) = 0.3$; $f_Y(0.6) = 0.7$

Bei einer diskreten Zufallsvariable X kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht grösser als 1 sein. Der Wert einer Dichte kann aber durchaus grösser als 1 werden.

2. Sei $a > 1$ und sei U eine $\mathcal{U}([a, a^2])$-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[U]$?

√ (a) $\frac{a(a+1)}{2}$

(b) $\frac{a^2}{2}$

(c) $a^2 + a$

(d) a

3. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert E[X]?

(a) 1

√ (b) $1/\lambda$

(c) λ

(d) λ^2

Man berechnet durch partielle Ableitung

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx}_{=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

4. Seien $\mu, \lambda > 0$. Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Was ist der Erwartungswert von $\mathrm{E}[\lambda X + \mu Y]$?

(a) $\lambda^2 + \mu^2$

(b) $\lambda + \mu$

(c) $1/\lambda + 1/\mu$

√ (d) 2

Wir verwenden die Linearität des Erwartungswerts und erhalten

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda\mathbb{E}[X] + \mu\mathrm{E}[Y] = \lambda \cdot 1/\lambda + \mu \cdot 1/\mu = 1 + 1 = 2.$$

5. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und Y eine Zufallsvariable, sodass $X + Y \sim \mathcal{N}(1, 6)$. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$?

(a) 2

√ (b) 1

(c) 0

(d) -1

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X + Y] - \mathrm{E}[X] = 1 - 0 = 1$.

6. (*) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und sei $Y := 2 \cdot X^3$. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$?

(a) 2

(b) 1

√ (c) 0

(d) −1

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt $\mathrm{E}[Y] = 2 \cdot \mathrm{E}[X^3]$. Man berechnet dann

$$\mathbb{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

da $\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ eine ungerade Funktion ist.

7. Sei $a > 0$ und sei U eine $\mathcal{U}([a, 2a])$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_U^2?

(a) $\frac{a^2}{24}$

√ (b) $\frac{a^2}{12}$

(c) $\frac{a^2}{4}$

(d) $\frac{a^2}{3}$

Wir berechnen zunächst die Varianz einer $\mathcal{U}([a, b])$-verteilte Zufallsvariable Y. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \frac{b+a}{2}\right)^2 f_Y(y) dy = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dy = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3\right]_a^b \\
&= \frac{2}{3(b-a)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $\sigma_U^2 = \frac{a^2}{12}$.

8. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) 1

(b) $1/\lambda$

(c) λ

√ (d) $1/\lambda^2$

Man berechnet durch partielle Integration

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx}_{=\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{2}{\lambda}\mathrm{E}[X].$$

und somit gilt $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$, wobei wir $\mathrm{E}[X] = 1/\lambda$ aus Frage 4 verwendet haben.

9. Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $X + Y \sim \mathcal{N}(1,6)$. Was ist die Varianz σ_Y^2?

(a) 35

√ (b) 5

(c) 1

(d) 0

Aus der Unabhängigkeit wissen wir, dass $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Somit folgt $\sigma_Y^2 = \sigma_{X+Y}^2 - \sigma_X^2 = 6 - 1 = 5$.

10. (*) Sei $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, sodass $[a,b] \in \mathcal{F}$ für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$ gilt (also auch $\{a\} \in \mathcal{F}$). Welche der folgenden Mengen sind Elemente von $\mathcal{F}$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) $\emptyset$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra.

√ (b) $(\frac{1}{2}, 1]$

Richtig! Da $[0, \frac{1}{2}] \in \mathcal{F}$, gilt auch $(\frac{1}{2}, 1] = [0, \frac{1}{2}]^\mathsf{c} \in \mathcal{F}$.

√ (c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

Richtig! Da $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \in \mathcal{F}$, $\{\frac{1}{2}\} \in \mathcal{F}$ und $\{\frac{3}{4}\} \in \mathcal{F}$, gilt auch $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cap \{\frac{1}{2}\}^\mathsf{c} \cap \{\frac{3}{4}\}^\mathsf{c} \in \mathcal{F}$.

√ (d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

Richtig! Da $\{\frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist auch die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ ein Element von $\mathcal{F}$.