Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 9

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde

Dieser Quiz beschäftigt sich mit dem Gesetz der grossen Zahlen und mit dem zentralen Grenzwertsatz. Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2023/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen. Unter welchen Bedingungen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathrm{E}[X_1] \text{ fast sicher ?}$$

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) Dies gilt für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$.

Richtig!

(b) Dies gilt für identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$.

Leider nicht.

(c) Dies gilt für unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[|X_1|] < \infty$.

Leider nicht.

(d) Dies gilt für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

Leider nicht.

Dies ist die Aussage des Gesetzes der grossen Zahlen.

2. Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $U_1 \sim \mathcal{U}([-2, 1])$. Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i = 1/2$ fast sicher.

Leider nicht.

√ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i = -1/2$ fast sicher.

Richtig!

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i = 1/2$ fast sicher.

Leider nicht.

(d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i = -1/2$ fast sicher.

Leider nicht.

Nach dem Gesetz der grossen Zahlen gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i = -1/2,$$

da $\mathrm{E}[U_1] = (-2+1)/2 = -1/2$.

3. Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_1 \sim \mathrm{Exp}(4)$. Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{2i} = 4$ fast sicher.

Leider nicht.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} T_{2i} = 4$ fast sicher.

Leider nicht.

√ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{2i} = 1/4$ fast sicher.

Richtig!

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} T_{2i} = 1/4$ fast sicher.

Leider nicht.

Die Folge $(T_{2i})_{i\geq 1}$ ist ebenfalls eine Folge von unabhängigen, Exp(4)-verteilten Zufallsvariablen (es handelt sich um eine Teilfolge von $(T_i)_{i\geq 1}$). Nach dem Gesetz der grossen Zahlen gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{2i} = 1/4,$$

da $\mathrm{E}[T_2] = \mathrm{E}[T_1] = 1/4$.

4. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 1] = 3/4.$$

Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$ fast sicher.

Leider nicht.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$ fast sicher.

Leider nicht.

$\checkmark$ (c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$ fast sicher.

Richtig!

(d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$ fast sicher.

Leider nicht.

Nach dem Gesetz der grossen Zahlen gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 1/2,$$

da $\mathrm{E}[X_1] = 3/4 - 1/4 = 1/2$. Sei $\epsilon > 0$. Insbesondere gilt somit fast sicher, dass es ein $N \geq 1$ gibt, sodass für alle $n \geq N$, $\sum_{i=1}^n X_i \geq (1/2 - \epsilon)n$, also auch $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$.

5. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[X_1^2] < \infty$. Sei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Wir definieren $m := \mathrm{E}[X_1]$ und $\sigma^2 := \mathrm{E}[X_1^2] - \mathrm{E}[X_1]^2$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht.

(b) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht. Hier wurde durch $\sigma^2 n$ statt durch $\sqrt{\sigma^2 n}$ geteilt.

$\checkmark$ (c) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Richtig!

(d) $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht. Dies gilt nur falls $m = 0$.

Dies ist die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes, wobei wir $\mathbb{P}[Z \leq a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$ verwendet haben.

6. Sei $T_1, T_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_1 \sim \text{Exp}(4)$. Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \lambda \cdot (n + a\sqrt{n})\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht.

√ (b) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{n+a\sqrt{n}}{\lambda}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Richtig!

(c) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \lambda a\sqrt{n}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht.

(d) $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{a\sqrt{n}}{\lambda}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Leider nicht.

Für $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt $\mathrm{E}[T_1] = 1/\lambda$ und $\sigma_{T_1}^2 = 1/\lambda^2$. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt also, dass

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \frac{n+a\sqrt{n}}{\lambda}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{\lambda}) \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a], \ \forall a \in \mathbb{R},$$

wobei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist. Durch Einsetzen von $\lambda = 4$ erhält man das Resultat.

7. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X = -1] = 1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = 1/2.$$

Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n^{1/4}\right] = 1.$

Leider nicht. *Variante 1:* Da (b) falsch ist, folgt auch, dass dies nicht korrekt sein kann. *Variante 2:* Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{P}[Z \leq 0] = 1/2$ konvergiert (siehe unten), wobei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist.

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n^{1/2}\right] = 1.$

Leider nicht. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{P}[Z \leq 1]$ konvergiert (siehe unten), wobei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist.

$\surd$ (c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n^{3/4}\right] = 1.$

Richtig! Dies folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz (siehe unten).

$\surd$ (d) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n\right] = 1.$

Richtig! Dies folgt direkt, da $X_i \leq 1$ für alle $i \geq 1$.

Für X_1 gilt $\mathrm{E}[T_1] = 0$ und $\sigma^2_{X_1} = 1$. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt also, dass

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ a\sqrt{n}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \leq a\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}[Z \leq a],\ \forall a \in \mathbb{R},$$

eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da $\lim_{n\to\infty} n^{1/2+\epsilon} \geq \lim_{n\to\infty} a\sqrt{n}$, gilt aufgrund der Monotonizität für alle $a \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n^{1/2+\epsilon}\right] \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq a\sqrt{n}\right]$$

und somit folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \ n^{3/4}\right] = \mathbb{P}[Z \leq \infty] = 1.$$