Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 1

Aufgabe 1.1 [Siedler von Catan]
Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan“. Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt, und diejenigen Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.

(a) Wähle den Grundraum $\Omega := \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge“ mit einer Teilmenge von Ω.

(b) Welche Landschaften (d.h. mit welcher Augenzahl) bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?

(c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft, oder alle Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft, d.h. die Sorte der „Rohstoffe“, bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)

Aufgabe 1.2 [Gezinkte Münzen]
Wir nehmen an, dass wir zwei gezinkte Münzen M_{gold} und M_{silber} in einer Urne haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass M_{gold}, resp. M_{silber}, auf Kopf landet, sei $p_g \in (0, 1)$, resp. $p_s \in (0, 1)$. Bei jedem Zufallsexperiment wird eine Münze aus der Urne gezogen, dann geworfen und schliesslich wieder in die Urne gelegt. Wir führen das Zufallsexperiment zweimal durch.

(a) Gebe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an. *(Wir nehmen an, dass die goldene und silberne Münze je mit Wahrscheinlichkeit* $1/2$ *aus der Urne gezogen werden.)*

(b) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $A =$„Beim ersten Wurf ist die Münze silber.“?

(c) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $B =$„Es wird zweimal Kopf geworfen.“?

(d) Berechne $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$ und $\mathbb{P}[A \cap B]$.

Aufgabe 1.3 [Eigenschaften einer σ-Algebra]

(a) *[De-Morgan Regel]* Sei $(A_n)_{i\geq 1}$ eine Folge von beliebigen Mengen. Zeige, dass Folgendes gilt:
$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}.$$

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω.

(b) Zeige, dass $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(c) Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Ereignissen, d.h. $A_i \in \mathcal{F}$ für alle $i \geq 1$. Zeige, dass
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

(d) Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(e) Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 1.4 [Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeige, dass $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$.

(b) Sei $k \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_k$ k paarweise disjunkte Ereignisse. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k].$$

(c) Sei A ein Ereignis. Zeige, dass $\mathbb{P}[A^{\mathsf{c}}] = 1 - \mathbb{P}[A]$.

(d) Seien A und B zwei beliebige Ereignisse (nicht notwendigerweise disjunkt). Zeige, dass die Additionsregel

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

gilt.