

# Wahrscheinlichkeit & Statistik

## Serie 10

---

Die Übungen mit (\*) markiert sind fakultativ.

**Aufgabe 10.1** Beim Abfüllen von Kartoffeln in 10-kg-Säcke variiert das Einfüllgewicht zwischen 9.750 kg und 10.750 kg. Die Einfüllgewichte sind in diesem Bereich gleichverteilt, Gewichte ausserhalb kommen nicht vor.

- (a) Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass beim Beladen eines Lieferwagens mit 146 Säcken das zulässige Ladegewicht von 1500 kg überschritten wird?
- (b) Wieviele Säcke darf man höchstens laden, damit das zulässige Ladegewicht nur mit (approximativer) Wahrscheinlichkeit 1% überschritten wird?

**Hinweis:** Die Gewichte der einzelnen Säcke können als unabhängig voneinander angenommen werden.

**Aufgabe 10.2** [ $\chi^2$ -Verteilung]

Sei  $Y$  eine  $\chi_n^2$ -verteilte Zufallsvariable mit  $n \in \mathbb{N}$ , das heisst

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

wobei  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind.

- (a) Zeige, dass

$$\mathbb{E}[Y] = n \quad \text{und} \quad \sigma_Y^2 = 2n$$

gilt.

- (b) Gebe mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{Y}{n} - 1 \right| \leq 0.75 \right].$$

Berechne die Schranke für  $n = 12$ .

- (c) Berechne für  $n = 12$  eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

**Aufgabe 10.3** [Median]

Der **Median**  $m$  einer Verteilung  $F$  wurde definiert durch  $m = F^{-1}(1/2)$ . Seien  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. mit Verteilungsfunktion  $F$ , Dichtefunktion  $f$ , und Median  $m = 0$ . Ferner soll  $f(0) > 0$  sein. Ferner sei  $Z_n$  der sogenannte **Stichprobenmedian** von  $X_1, \dots, X_n$ , d.h.  $Z_n$  ist die mittlere Beobachtung, oder formelmässig  $Z_n = X_{(k)}$  mit  $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , wobei  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  die der Grösse nach geordneten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  bezeichnen und  $\lceil x \rceil$  den ganzzahligen Teil von  $x$ .

- (a) Seien  $Y_i = 1_{\{X_i \leq x\}}$  und  $S_n(x) := \sum_{i=1}^n Y_i$ . Berechnen Sie  $\mathbb{E}[S_n(x)]$  und  $\text{Var}[S_n(x)]$ .

- (b) Beschreiben Sie das Ereignis  $\{Z_n \leq x\}$  mit Hilfe der Zufallsvariable  $S_n(x)$ .
- (c) (\*) Geben Sie eine Approximation für  $\mathbb{P}(Z_n \leq x)$  als  $n \rightarrow \infty$  und berechnen Sie die Grenze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2 - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n(1 - \alpha_n)}/\sqrt{n}},$$

wobei  $\alpha_n = F\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ .