Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 2

Aufgabe 2.1 [Fast sicher]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von fast sicher eintretenden Ereignissen, d.h. $\mathbb{P}[B_i] = 1, \forall i \geq 1$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1,$$

d.h. fast sicher treten *alle* (unendlich vielen) Ereignisse ein.

Aufgabe 2.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Federer vs. Nadal]
Wir analysieren einen Tennismatch von Roger Federer gegen Rafael Nadal. Der Match wird nach der Regel „best of 3“ gespielt; Sieger ist also, wer zuerst zwei Sätze gewinnt (es werden also maximal 3 Sätze gespielt). Wir nehmen an, dass Federer jeden einzelnen Satz – unabhängig von den anderen – mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$ gewinnt. Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass Federer den ersten Satz gewinnt, und B bezeichne das Ereignis, dass Federer den Match (also zwei Sätze) gewinnt.

(a) Drücke $A \cup B$, $A^{\mathsf{c}} \cap B$, $A \cap B^{\mathsf{c}}$ und $A \setminus B$ in Worten aus. Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[B^{\mathsf{c}}|A]$, $P[B|A]$ und $P[B|A^{\mathsf{c}}]$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Federer den Match gewinnt.

(c) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[A|B]$ und $P[A|B^{\mathsf{c}}]$ mit Hilfe des Satzes von Bayes.

Aufgabe 2.3 [σ-Algebren & Zufallsvariablen]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei verschiedene σ-Algebren:

$$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$$
$$\mathcal{F}_{sym} := \{A \subseteq \Omega : \forall(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\}$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ enthält alle Teilmengen von Ω. In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel die Augenzahl 5. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{sym}$ enthält nur symmetrische Teilmengen von Ω (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{sym}$ eine σ-Algebra ist.
Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften aus der Definition erfüllt sind.

(b) Wir betrachten zwei Teilmengen von Ω:

$$A := \text{„Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3“},$$
$$B := \text{„Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3“}.$$

Zeige, dass $A \in \mathcal{F}_{sym}$, aber $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{„Augenzahl des blauen Würfels“}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{„Augensumme der beiden Würfel“}$$

Zeige, dass X *keine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.
Zeige, dass S *eine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.

Aufgabe 2.4 [Pendlerzüge]

In zwei verschiedenen Pendlerzügen wurden die insgesamt 780 Pendler gefragt, ob sie an einem bestimmten Morgen im überfüllten Pendlerzug einen Sitzplatz fanden oder nicht. Von den total 520 Leuten in Zug A hatten 70% einen Sitzplatz, von den 260 Leuten in Zug B jedoch nur gerade 50%. Desweiteren wurden die Pendler gefragt, ob sie mit dem Angebot der SBB im Allgemeinen zufrieden seien oder nicht. Die folgende Tabelle beschreibt für jede der vier Kombinationen aus Zug A/Zug B und Sitzplatz/kein Sitzplatz den Anteil der Pendler, die mit den SBB zufrieden sind.

Zufrieden	Zug A	Zug B
Sitzplatz	80%	70%
kein Sitzplatz	30%	40%

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler keinen Sitzplatz hatte?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler im Zug A war oder einen Sitzplatz hatte?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler, welcher einen Sitzplatz hatte, zufrieden ist mit den SBB?

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler nicht zufrieden ist mit den SBB.