Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 5

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 5.1 [Verteilungsfuntion: Eigenschaften]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ziel dieser Aufgabe ist es, Eigenschaften der Verteilungsfunktion F_X von X zu beweisen. Zur Erinnerung: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist für $a \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a].$$

(a) Zeige, dass F_X monoton wachsend ist, d.h. für alle $a \leq b$ gilt

$$F_X(a) \leq F_X(b).$$

(b) Zeige, dass

$$\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{a \to \infty} F_X(a) = 1.$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11: Für eine monoton fallende bzw. steigende Folge von Ereignissen $(A_n)_{n \geq 1}$ (d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$ bzw. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 1$) gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right].$$

(c) (*) Zeige, dass F_X rechtsseitig stetig ist, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_X(a+) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a+h) = F_X(a).$$

(d) (*) Zeige, dass

$$\mathbb{P}[X = a] = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

wobei $F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a-h)$.

Aufgabe 5.2 [Diskrete Zufallsvariable: Verteilungsfuntion und Gewichtsfunktion]
Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1, \\ 1/5, & \text{falls } 1 \leq a < 4, \\ 3/4, & \text{falls } 4 \leq a < 6, \\ 1, & \text{falls } 6 \leq a. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechne die Gewichtsfunktion von X und skizziere diese.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = 6],\ \mathbb{P}[X = 5],\ \mathbb{P}[2 < X < 5.5],\ \mathbb{P}[0 \leq X < 4].$$

Aufgabe 5.3 [Gemeinsame Verteilung diskreter ZVen I]
Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j,k) = \mathbb{P}[X = j, Y = k] = \begin{cases} C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\dots \text{ und } j = 1,2,\dots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Konstante C.

(b) Berechne die Gewichtsfunktionen p_X und p_Y der Randverteilungen von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 5.4 [Ruin des Spielers] Zwei Spielerinnen Anja und Beatrice werfen wiederholt eine faire Münze. Anja bekommt 1 Franken von Beatrice, wenn die Münze auf Kopf landet und umgekehrt. Die Spielerinnen starten mit einem Kapital von a bzw. $N - a$. Das Spiel endet, wenn eine der Spielerinnen kein Geld mehr hat.

(a) Für jedes $a \in \{0, \dots, N\}$ sei q_a die Wahrscheinlichkeit, dass Anja das Spiel gewinnt. Was sind q_0 und q_N?

(b) Zeige, dass $q_a = \frac{1}{2}(q_{a-1} + q_{a+1})$ für jedes $a \in \{1, \dots, N-1\}$.

(c) Berechne q_a für $a \in \{0, \dots, N\}$.

(d) (*) Jetzt nehmen wir an, dass die Münze mit Wahrscheinlichkeit p auf Kopf landet. Berechne q_a in diesem Fall.