

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 6

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 6.1 [Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte]

Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T .
- (b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.
- (c) Berechne die Dichte von T .
- (d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[T = 2], \mathbb{P}[T \leq 1], \mathbb{P}[T \geq 2], \mathbb{P}[1 < T < 4].$$

Aufgabe 6.2 [Anwendung der Exponentialverteilung]

Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

- (a) Bestimme λ .
Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?
- (c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Aufgabe 6.3 [Erwartungswert stetiger ZVen I]

Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

- (a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Berechne die Dichte von $U' := a + (b - a)U$. Was ist der Erwartungswert von U' ?
- (b) (*) Sei $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne die Dichte von $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T' ?

Aufgabe 6.4 [Erwartungswert stetiger ZVen II] (*)

Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

- (a) Bestimme die Konstante c , sodass f zu einer Dichtefunktion wird.
- (b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Berechne den Erwartungswert von X . Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?