Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 7

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 7.1 Wähle aus der folgenden Liste zu jeder Situation (jeder Zufallsvariablen) eine Verteilung, die Du am ehesten für passend ansiehst!

(a) $X^{(a)}$ sei die Anzahl der Lokomotiven der SBB, die in der nächsten Woche einen Defekt haben.

(b) $X^{(b)}$ sei die Lebensdauer in der Schweiz im 17. Jahrhundert.

(c) $X^{(c)}$ sei der Rundungsfehler einer Messung, die auf eine Stelle nach dem Dezimalpunkt gerundet ist.

(d) $X^{(d)}$ sei die Anzahl der Gewinner mit 4 Richtigen im Schweizer Zahlenlotto im Jahr 2018.

(e) $X^{(e)}$ sei die Anzahl fauler Äpfel in einer Packung zu 6 Stück.

(f) $X^{(f)}$ sei die Lebensdauer (in Jahren) eines radioaktiven Teilchens.

(g) $X^{(g)}$ sei der Wirkstoffgehalt (in mg) einer Tablette.

(h) $X^{(h)}$ sei der Nadelverlust (in %) einer zufällig ausgewählten Fichte eines Schweizer Gebirgswaldes.

(i) Jemand würfelt bis zur ersten 6. Sei $X^{(i)}$ die Anzahl der Würfe, die es dazu braucht.

(j) Wir untersuchen den Kariesbefall von 467 Kindern. Dazu zählen wir bei jedem Kind die Zahl der kariösen/gefüllten Zahnflächen. Sei $X^{(j)}$ die Anzahl der kariösen/gefüllten Zahnflächen dieser Kinder.

Liste der Verteilungen:

- Binomial
- Geometrische Verteilung
- Poisson
- Andere diskrete Verteilung
- Normal
- Exponential
- Uniform (Gleichverteilung)
- Andere stetige Verteilung

Aufgabe 7.2 Der Radius R eines kugelförmigen Teilchens sei uniform verteilt auf dem Intervall $[10, 100]\mu m$, und V bezeichne das Volumen dieses Teilchens.

(a) Berechne den Erwartungswert von V.

(b) (*) Berechne die Dichte von V.

Wir nehmen nun an, der Radius R sei *lognormal* verteilt (eine Zufallsvariable Y heisst lognormal verteilt, falls $\log Y$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist).

(c) Zeige: Wenn R lognormal verteilt ist, dann ist auch V lognormal verteilt.

Aufgabe 7.3 Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt X in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb (parts per billion) beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.

(a) Mache eine Skizze der Dichte von X und zeichne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Blei enthält?

Hinweis: Gehe zur standardisierten Zufallsvariablen Z über und benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung (s.175 im Skript von M. Schweizer).

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Blei enthält?

(d) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimme dasjenige c, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich c ist, genau 97.5% beträgt.

(e) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?

(f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?

Aufgabe 7.4 (*) Seien X und Y die Lebensdauer zweier Maschinen, "Maschine 1" bzw. "Maschine 2", in Monaten. Die beiden Variablen sind unabhängig und exponentialverteilt:

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \text{ mit } \lambda_1 = \frac{1}{10}, \quad Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2) \text{ mit } \lambda_2 = \frac{1}{15}$$

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 mehr als doppelt so lange funktioniert wie Maschine 2?

(b) Wenn man weiss, dass Maschine 1 nach 4 Monaten kaputt war, was ist dann die erwartete Lebensdauer der Maschine 2?