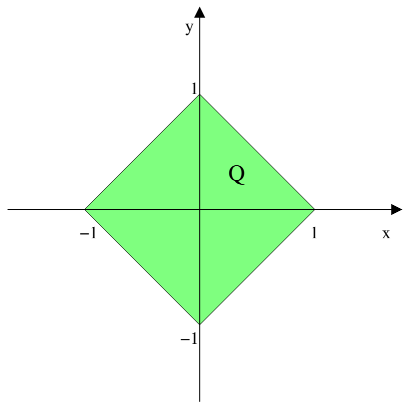
Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 8

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 8.1 [Quadrat]
Die gemeinsame Dichte $f(x,y)$ zweier stetiger Zufallsvariablen X, Y sei im Quadrat Q (vgl. Skizze) konstant und verschwinde ausserhalb von Q.



(a) Bestimme die gemeinsame Dichte von (X, Y).

(b) Bestimme die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y.

(c) Bestimme die bedingte Verteilung von X gegeben Y. Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

(d) Was ist die Antwort in (c), wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

Aufgabe 8.2 [Korrelation & Unabhängigkeit]
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

d.h. die Zufallsvariablen sind unkorreliert. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht gilt.

(a) Sei $X \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$. Zeige, dass $Y := \cos(X)$ und $Z := \sin(X)$ unkorreliert sind, d.h.

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0.$$

(b) (*) Zeige, dass Y und Z nicht unabhängig sind.

Aufgabe 8.3 [Normalverteilung]
Sei $n \geq 1$ und $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(1, 4)$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

und

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Zur Erinnerung: Wir schreiben $\Phi(a) = \mathbb{P}[Z \leq a]$ für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Numerische Werte für Φ finden sich in der Tabelle der Standardnormalverteilung (s.175 im Skript von M. Schweizer).

(a) Bestimme die Verteilung von S_n sowie $\bar{X}_n$.
Hinweis: Nutze die Eigenschaften der Normalverteilung.

(b) Bestimme die bedingte Verteilung von S_n gegeben X_1.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\mathrm{E}[X_1] - 1 \leq X_1 \leq \mathrm{E}[X_1] + 1]$.

(d) Berechne $\mathbb{P}[\mathrm{E}[S_n] - 1 \leq S_n \leq \mathrm{E}[S_n] + 1]$ für $n = 50$.

(e) Berechne $\mathbb{P}[\mathrm{E}[\bar{X}_n] - 1 \leq \bar{X}_n \leq \mathrm{E}[\bar{X}_n] + 1]$ für $n = 50$.

Aufgabe 8.4 [Extrema gleichverteilter ZVen] (*)
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne die Dichte von M und die Dichte von L.

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\mathrm{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die gemeinsame Verteilungsfunktion und die gemeinsame Dichte von (M, L) zu bestimmen.