

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 9

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 9.1 [Empirische Verteilungsfunktion]

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Die empirische Verteilungsfunktion $F_n : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ ist gegeben durch

$$F_n(t, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i(\omega) \leq t}.$$

Der Wert $F_n(t, \omega)$ beschreibt also die relative Häufigkeit der $X_i(\omega)$ mit Werten $\leq t$ unter den ersten n . Damit ist $F_n(t) := F_n(t, \cdot)$ selbst eine Zufallsvariable für jedes $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und $Y_i := \mathbb{1}_{X_i \leq t}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass Y_1, Y_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Was ist $E[Y_1]$?
- (b) Zeige, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die empirische Verteilungsfunktion $F_n(t)$ fast sicher gegen $F(t)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 9.2 [Zentraler Grenzwertsatz I: Zufällige Irrfahrt]

Seien $(X_i)_{i \geq 1}$, $(Y_i)_{i \geq 1}$ und $(Z_i)_{i \geq 1}$ Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2$$

und analog $\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1/2$ sowie $\mathbb{P}[Z_1 = 1] = \mathbb{P}[Z_1 = -1] = 1/2$. Wir definieren

$$S_n^{(x)} := \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^{(y)} := \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{and} \quad S_n^{(z)} := \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Die Folge $((S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}))_{n \geq 1}$ wird zufällige Irrfahrt in \mathbb{Z}^3 genannt. Sei $\alpha > 1/2$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[\|(S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)})\|_2 \leq n^\alpha] \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei $\|(x, y, z)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die euklidische Norm ist.

Hinweis: Betrachte zuerst die Folge $(S_n^{(x)})_{n \geq 1}$ und wende den zentralen Grenzwertsatz an.

Aufgabe 9.3 [Zentraler Grenzwertsatz II]

In dieser Aufgabe berechnen wir den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

- (a) Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Berechne $E[X]$ und σ_X^2 .
- (b) Zeige mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass der obige Grenzwert $1/2$ ist.

Hinweis: Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y mit $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, und $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, $\mu > 0$, ist $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

Aufgabe 9.4 [Gesetz der grossen Zahlen II: Approximation von π mit Münzwürfen] (*)

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man die Zahl π mit Hilfe von $\mathcal{U}([0, 1])$ -verteilten Zufallsvariablen approximieren kann. Ziel dieser Aufgabe ist es, dies nun mit Hilfe einer Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängiger, $\text{Ber}(1/2)$ -verteilter Zufallsvariablen zu tun.

- (a) Sei $n \geq 1$. Für $i, j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ definieren wir Quadrate mit Seitenlänge 2^{-n} durch

$$S_{i,j} := [i \cdot 2^{-n}, (i+1) \cdot 2^{-n}] \times [j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n}].$$

Zeige, dass $2n$ $\text{Ber}(1/2)$ -verteilte Zufallsvariablen ausreichen, um zufällig eines der Quadrate $S_{i,j}$ auszuwählen (sodass jedes Quadrat mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird).

- (b) Wir wollen einen Algorithmus finden, der die (zufälligen) Bits X_1, X_2, \dots als Input nimmt, und als Output eine $\text{Ber}(\pi/4)$ -verteilte Zufallsvariable ausgibt. Gebe einen solchen Algorithmus an, sodass

$$\mathbb{P}[T > 2n] \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

wobei T die Anzahl der benötigten Input Bits bezeichnet.

Hinweis: Ein Punkt $(x, y) \in [0, 1]^2$ liegt innerhalb des Einheitskreises genau dann, wenn $x^2 + y^2 \leq 1$.

- (c) Wie können wir den Algorithmus aus Teilaufgabe (b) nutzen, um die Zahl π zu approximieren?