Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 13

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 13.1 [Zweiseitiger z-Test]
Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity-Zug beträgt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
152	145	141	137	145	146	139	147	138

Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen einer u.i.v. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ ein unbekannter Parameter und $\sigma^2 = 9$ ist. Führen Sie einen geeigneten Test durch, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

Lösung 13.1
Da die Varianz $\sigma^2 = 9$ bekannt ist, liegt es nahe, in diesem Fall einen (zweiseitigen) z-Test durchzuführen. Wir möchten also die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0 = 146$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \mu \neq \mu_0$ testen und dabei die Teststatistik

$$T = \frac{\overline{X}_9 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{9}}$$

verwenden. Unter $\mathbb{P}_{\mu_0}$ ist $T \sim \mathcal{N}(0,1)$, und den kritischen Bereich wählen wir von der Form $K_{\neq} = (-\infty, c_{\neq}) \cup (c_{\neq}, \infty)$. Wir verwerfen also H_0, falls $|T| > c_{\neq}$ für ein zu bestimmendes $c_{\neq}$ ist. Da wir auf dem 5%-Niveau testen möchten, wählen wir $c_{\neq}$ so, dass

$$0.05 = \alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}[T \in K_{\neq}] = 2\big(1 - \Phi(c_{\neq})\big)$$

gilt. Das ergibt den Wert $c_{\neq} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = z_{0.975} = 1.96$. Der realisierte Wert der Teststatistik T ist

$$T(\omega) = t(x_1, \ldots, x_n) = -2.67.$$

Wegen $|T(\omega)| > 1.96$ verwerfen wir also die Hypothese, dass die mittlere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity nicht abweicht. Würden wir stattdessen die Alternative $H'_A : \mu < \mu_0$ testen, so wäre $K_< = (-\infty, c_<)$ mit $c_< = z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.645$. Wegen $T(\omega) \in K_<$ wird auch hier die Hypothese verworfen; die Daten weisen also darauf hin (aber sie beweisen nicht), dass der Cisalpino im Mittel eine kürzere Fahrzeit hat.

Aufgabe 13.2 [Konfidenzintervall für $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit bekannter Standardabweichung] In einem Sägewerk wird das Schnittholz einer bestimmten Sortierklasse einer Qualitätskontrolle unterzogen. Pro Produktionstag wird eine Stichprobe mit zehn Brettern entnommen und jedes Brett auf seine Steifigkeit getestet. Basierend auf Erfahrung kann angenommen werden, dass die Steifigkeit eines Brettes normalverteilt ist mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1430$ MPa [1].

(a) Leiten Sie die Formel des 95%-Konfidenzintervalls für μ nach 15 Produktionstagen her.

(b) Berechnen Sie aus a) das realisierte Konfidenzintervall für einen beobachteten Stichprobenmittelwert von $\overline{x} = 11'000$ MPa (nach 15 Produktionstagen).

(c) Wie viele Stichproben wären nötig, damit die Breite des Konfidenzintervalls kleiner als 200 MPa ist?

Lösung 13.2

(a) Wir wissen, dass

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) \ .$$

Also gilt

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

wobei $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ das $(1 - \frac{\alpha}{2}) \times 100\%$-Quantil der Standardnormalverteilung ist. Durch Umformen erhalten wir

$$P\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Also hat das Vertrauensintervall die Form

$$\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mit $\alpha = 0.05$. Das Vertrauensintervall nach 15 Produktionstagen (mit Stichproben von je 10 Brettern) ist

$$\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{150}}.$$

(b) Aus a) wissen wir, dass das Vertrauensintervall die Form $\overline{X} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ hat. Durch Einsetzen erhalten wir $(10771.15, 11228.85)$, wobei wir verwendet haben, dass $\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = 1.96$ für $\alpha = 0.05$.

(c) Die Breite des Vertrauensintervalls ist gegeben durch $2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Also folgt, dass

$$\begin{aligned} 2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq 200\,, \\ \frac{z_{1-\alpha/2}\sigma}{100} &\leq \sqrt{n}\,, \\ 785.57 &\leq n. \end{aligned}$$

Das heisst, es muss $n \geq 786$ gelten. Dies bedeutet, dass wir entweder mindestens 79 Tage lang Stichproben von 10 Brettern sammeln oder alternativ während 15 Produktionstagen täglich mindestens 53 Bretter testen müssten.

[1] Das Pascal ist eine abgeleitete SI-Einheit des Drucks sowie der mechanischen Spannung. Sie ist nach Blaise Pascal benannt und folgendermassen definiert: 1 Pa= $1\text{kg}\times\text{m}^{-1}\times\text{s}^{-2} = 1\text{N}\times\text{m}^{-2}$. Ein Pascal ist also der Druck, den eine Kraft von einem Newton auf eine Fläche von einem Quadratmeter ausübt. 1 MPa = 10^6 Pa = 10 bar.

Aufgabe 13.3 [Approximatives Konfidenzintervall I: Geometrische Verteilung]
Sei $\Theta = [1/2, 1]$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$. Der Maximum-Likelihood Schätzer für θ ist gegeben durch

$$T_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Bestimme ein approximatives Konfidenzintervall für θ mit Niveau 95%.
Hinweis: Für alle $\theta \in [1/2, 1]$ *gilt* $\frac{\sqrt{1-\theta}}{\theta} \leq \sqrt{2}$. *Weiterhin wissen wir, dass* $\mathrm{E}_\theta[X_1] = 1/\theta$ *und* $\mathit{Var}_\theta[X_1] = (1-\theta)/\theta^2$.

Lösung 13.3 Da $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ den Erwartungswert $1/\theta$ und die Varianz $(1-\theta)/\theta^2$ hat, ist

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/\theta}{\sqrt{n(1-\theta)/\theta^2}}$$

approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt für $n \to \infty$ nach dem Zentralen Grenzwertsatz. Nach dem Hinweis gilt $\sqrt{1-\theta}/\theta \leq \sqrt{2}$ für alle $\theta \in [1/2, 1]$ und somit gilt für alle $\theta \in [1/2, 1]$, dass

$$\mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/\theta}{\sqrt{2n}} \leq 1.96\right] \geq \mathbb{P}_\theta\left[-1.96 \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/\theta}{\sqrt{n(1-\theta)/\theta^2}} \leq 1.96\right] \geq 0.95.$$

Da wir ein approximatives Konfidenzintervall suchen, also n gross annehmen, können wir auch annehmen, dass $\sqrt{n} \geq 1.96 \cdot \sqrt{2}$ und somit $\sum_{i=1}^n X_i \geq n \geq 1.96 \cdot \sqrt{2n}$, da X_i Werte in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ annimmt. Damit gilt

$$-1.96 \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/\theta}{\sqrt{2n}} \leq 1.96 \iff \frac{1}{(T_{ML})^{-1} + \frac{1.96\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{1}{(T_{ML})^{-1} - \frac{1.96\sqrt{2}}{\sqrt{n}}},$$

also ergibt sich ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für θ als

$$\left[\frac{1}{(T_{ML})^{-1} + \frac{1.96\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}, \frac{1}{(T_{ML})^{-1} - \frac{1.96\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}\right].$$

Aufgabe 13.4 [Approximatives Konfidenzintervall II: Binomialverteilung]
Um die Anzahl N der Forellen in einem See zu bestimmen, wird folgendermassen vorgegangen (Capture-Recapture-Methode): In einem ersten Schritt werden 500 Forellen gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. In einem zweiten Schritt werden nochmals 200 Forellen gefangen und die Anzahl X der markierten Forellen bestimmt.

(a) Für X wird oft eine Binomialverteilung angenommen, $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ (θ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass ein im zweiten Schritt gefangener Fisch markiert ist).
Wie gross ist n? Wie gross ist der Parameter θ, wenn die Gesamtzahl der Forellen im See $N = 2000$ bzw. $N = 5000$ ist?

(b) Die tatsächliche Beobachtung für X ergibt den Wert 40. Gebe eine vernünftige Schätzung für den Parameter θ an, und leite daraus eine Schätzung für die Gesamtzahl N der Forellen im See ab.

(c) Bestimme ein approximatives Konfidenzintervall für θ mit Level 95% und daraus ein approximatives Konfidenzintervall für N mit Level 95%.

Hinweis: Benutze für den Schätzer von θ den zentralen Grenzwertsatz.

Lösung 13.4

(a) Weil wir im zweiten Schritt 200 Fische herausziehen, ist $n = 200$. Die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Schritt einen markierten Fisch zu fangen, ist also

$$\theta = \frac{\text{Anzahl markierte Fische}}{\text{Totale Anzahl Fische im See}} = \frac{500}{N}. \tag{1}$$

Für $N = 2000$ ergibt dies $\theta = 1/4$, und für $N = 5000$ erhält man $\theta = 1/10$.

(b) Wir schätzen θ durch $T = X/n$. Der realisierte Schätzwert ist also

$$T^{(\theta)}(\omega) = X(\omega)/n = 40/200 = 1/5.$$

Wenn wir (1) nach N auflösen, ergibt sich für die Gesamtanzahl der Forellen im See die Schätzung

$$T^{(N)} = \frac{500}{T^{(\theta)}} = \frac{500n}{X},$$

mit realisiertem Wert

$$T^{(N)}(\omega) = \frac{500}{T^{(\theta)}(\omega)} = 2500.$$

(c) Da $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ Erwartungswert $n\theta$ und Varianz $n\theta(1-\theta)$ hat, ist

$$\frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt für $n \to \infty$ nach dem Zentralen Grenzwertsatz. Also gilt für alle $\theta \in [0, 1]$, dass

$$\mathbb{P}_\theta \left[-1.96 \le \frac{X - n\theta}{\sqrt{n/4}} \le 1.96 \right] \ge \mathbb{P}_\theta \left[-1.96 \le \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \le 1.96 \right] \ge 0.95,$$

wobei wir wie in der Vorlesung verwendet haben, dass $\theta(1-\theta) \le 1/4$ für alle $\theta \in [0, 1]$.
Somit ergibt sich ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für θ als

$$\left[T^{(\theta)} - \frac{1.96}{2\sqrt{n}}, T^{(\theta)} + \frac{1.96}{2\sqrt{n}} \right].$$

Der realisierte Wert ergibt sich durch Einsetzen von $T^{(\theta)}(\omega) = 1/5$ als $[0.13, 0.27]$. Unter Verwendung von (1) ergibt sich daraus $[1851, 3846]$ als realisiertes 95%-Konfidenzintervall für N.