Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 1

Aufgabe 1.1 [Siedler von Catan]
Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan“. Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt, und diejenigen Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.

(a) Wähle den Grundraum $\Omega := \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge“ mit einer Teilmenge von Ω.

(b) Welche Landschaften (d.h. mit welcher Augenzahl) bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?

(c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft, oder alle Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft, d.h. die Sorte der „Rohstoffe“, bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)

Lösung 1.1

(a) Die gesuchte Teilmenge ist

$$\Omega_9 = \{(3, 6),\ (4, 5),\ (5, 4),\ (6, 3)\}.$$

(b) Man geht wie folgt vor: Der Grundraum hat 36 Elemente; diese kann man nach Summe der Augenzahlen in 11 Gruppen (Ω_2, Ω_3, $\dots$, Ω_{12}) einteilen. Hierbei stehen die Indizes jeweils für die Summe der Augenzahlen. Man zählt dann die Elemente dieser Ω_i und findet $|\Omega_2| = 1$, $|\Omega_3| = 2$, $\dots$, $|\Omega_7| = 6$, $|\Omega_8| = 5$, $\dots$, $|\Omega_{12}| = 1$.

Je mehr Elemente eine Menge hat, desto häufiger wird die entsprechende Zahl voraussichtlich als Summe der Augenzahlen vorkommen. Mithilfe des Laplace-Modells können wir die Wahrscheinlichkeiten explizit angeben: $P(\Omega_2) = 1/36$, $P(\Omega_3) = 2/36$, $\dots$, $P(\Omega_7) = 6/36$, $P(\Omega_8) = 5/36$, $\dots$, $P(\Omega_{12}) = 1/36$. Die Antwort ist also: Die ertragreichsten Landschaften sind die 6er bzw. die 8er, und die ärmsten sind die 2er bzw. 12er. Beachte dabei, dass es keine 7er Landschaften gibt.

(c) In Anlehnung an Teilaufgabe b) wissen wir $|\Omega_8| = 5$, $|\Omega_4| = 3$ und $|\Omega_{12}| = 1$. Somit kann man folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen: $P(\Omega_8) = 5/36$, und da Ω_4 und Ω_{12} disjunkt sind, gilt $P(\Omega_4 \cup \Omega_{12}) = P(\Omega_4) + P(\Omega_{12}) = 4/36$. Da die Wahrscheinlichkeit des Rohstoffeinkommens in der ersten Variante somit höher ist, sollte man diese Variante wählen.

Aufgabe 1.2 [Gezinkte Münzen]
Wir nehmen an, dass wir zwei gezinkte Münzen M_{gold} und M_{silber} in einer Urne haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass M_{gold}, resp. M_{silber}, auf Kopf landet, sei $p_g \in (0,1)$, resp. $p_s \in (0,1)$. Bei jedem Zufallsexperiment wird eine Münze aus der Urne gezogen, dann geworfen und schliesslich wieder in die Urne gelegt. Wir führen das Zufallsexperiment zweimal durch.

(a) Gebe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an. *(Wir nehmen an, dass die goldene und silberne Münze je mit Wahrscheinlichkeit* $1/2$ *aus der Urne gezogen werden.)*

(b) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $A =$„Beim ersten Wurf ist die Münze silber.“?

(c) Welches Element von $\mathcal{F}$ entspricht dem Ereignis $B =$„Es wird zweimal Kopf geworfen.“?

(d) Berechne $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$ und $\mathbb{P}[A \cap B]$.

Lösung 1.2

(a) Zuerst wählen wir einen Grundraum, der alle möglichen Ergebnisse umfasst. Bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments kann die gezogene Münze gold (g) oder silber (s) sein und beim Wurf kann die Münze auf Kopf (K) oder Zahl (Z) fallen. Das Ergebnis einer Durchführung kann also als ein Element in $\{(g,K),(g,Z),(s,K),(s,Z)\}$ betrachtet werden. Da wir das Zufallsexperiment zweimal durchführen, ist

$$\Omega = \{(g,K),(g,Z),(s,K),(s,Z)\}^2$$

eine geeignete Wahl als Grundraum. Die Elemente von Ω haben die Form $\omega = ((m_1,x_1),(m_2,x_2))$, wobei $m_1, m_2 \in \{g,s\}$ und $x_1, x_2 \in \{K,Z\}$. Beispielsweise stellt $((g,K),(s,K)) \in \Omega$ das Ergebnis dar, dass die erste Münze gold ist und auf Kopf fällt und dass die zweite Münze silber ist und auf Kopf fällt.

Wir wählen die Potenzmenge von Ω als σ-Algebra, also $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Insbesondere gilt für alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$, dass „ω tritt ein“ ein Ereignis ist, also $\{\omega\} \in \mathcal{F}$.

Wir definieren nun ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ in zwei Schritten. Im ersten Schritt definieren wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\omega\}$ („ω tritt ein“) für jedes Ergebnis $\omega = ((m_1,x_1),(m_2,x_2)) \in \Omega$ durch

$$\mathbb{P}[((m_1,x_1),(m_2,x_2))] = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot p_{m_1} \cdot p_{m_2} & \text{falls } x_1 = x_2 = K, \\ \frac{1}{4} \cdot (1-p_{m_1}) \cdot p_{m_2} & \text{falls } x_1 = Z, x_2 = K, \\ \frac{1}{4} \cdot p_{m_1} \cdot (1-p_{m_2}) & \text{falls } x_1 = K, x_2 = Z, \\ \frac{1}{4} \cdot (1-p_{m_1}) \cdot (1-p_{m_2}) & \text{falls } x_1 = x_2 = Z. \end{cases}$$

Das Ereignis „Die erste Münze ist gold und fällt auf Kopf und die zweite Münze ist silber und fällt auf Kopf“ hat also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4} \cdot p_g \cdot p_s$. Der Faktor $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ kommt daher, dass die erste Münze mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gold ist und die zweite Münze mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ silber. Im zweiten Schritt definieren wir für ein beliebiges Ereignis $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega].$$

Da Ω endlich ist, kann man nun leicht prüfen, dass die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ in der Tat ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist, insbesondere dass

$$\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\omega] = 1$$

gilt.

(b) Das Ereignis „Beim ersten Wurf ist die Münze silber“ entspricht

$$\begin{aligned} A &= \{((m_1,x_1),(m_2,x_2)) \in \Omega : m_1 = s\} \\ &= \{((s,K),(g,K)),((s,K),(g,Z)),((s,K),(s,K)),((s,K),(s,Z)), \\ &\qquad ((s,Z),(g,K)),((s,Z),(g,Z)),((s,Z),(s,K)),((s,Z),(s,Z))\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(c) Das Ereignis „Es wird zweimal Kopf geworfen“ entspricht

$$\begin{aligned} B &= \{((m_1,x_1),(m_2,x_2)) \in \Omega : x_1 = x_2 = K\} \\ &= \{((g,K),(g,K)),((g,K),(s,K)),((s,K),(g,K)),((s,K),(s,K))\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega] = \sum_{m_2 \in \{g,s\}; x_1,x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[((s,x_1),(m_2,x_2))] \\ &= \sum_{x_1,x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[((s,x_1),(g,x_2))] + \sum_{x_1,x_2 \in \{K,Z\}} \mathbb{P}[((s,x_1),(s,x_2))] \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(p_s \cdot p_g + (1-p_s)\cdot p_g + p_s \cdot (1-p_g) + (1-p_s)\cdot(1-p_g))}_{=1} \\ &+ \frac{1}{4} \underbrace{(p_s \cdot p_s + (1-p_s)\cdot p_s + p_s \cdot (1-p_s) + (1-p_s)\cdot(1-p_s))}_{=1} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B] &= \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}[\omega] = \sum_{m_1,m_2 \in \{g,s\}} \underbrace{\mathbb{P}[((m_1,K),(m_2,K))]}_{=\frac{1}{4}\cdot p_{m_1}\cdot p_{m_2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left((p_g)^2 + 2\cdot p_s \cdot p_g + (p_s)^2\right) = \frac{(p_g+p_s)^2}{4}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $A \cap B = \{((s,K),(g,K)),((s,K),(s,K))\} \in \mathcal{F}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B] &= \sum_{\omega \in A \cap B} \mathbb{P}[\omega] = \mathbb{P}[((s,K),(g,K))] + \mathbb{P}[((s,K),(s,K))] \\ &= \frac{1}{4}\cdot p_s \cdot p_g + \frac{1}{4} \cdot p_s \cdot p_s = \frac{p_s \cdot (p_g + p_s)}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3 [Eigenschaften einer σ-Algebra]

(a) *[De-Morgan Regel]* Sei $(A_n)_{i\geq 1}$ eine Folge von beliebigen Mengen. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}.$$

Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω.

(b) Zeige, dass $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(c) Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Ereignissen, d.h. $A_i \in \mathcal{F}$ für alle $i \geq 1$. Zeige, dass

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

(d) Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(e) Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Lösung 1.3

(a) Wir beweisen die De-Morgan Regel, indem wir beide Inklusionen zeigen.

$\subseteq$: Sei $\omega \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^{\mathsf{c}}$. Für alle $1 \leq j < \infty$ gilt $A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und somit folgt für alle $1 \leq j < \infty$,

$$\omega \in (A_j)^{\mathsf{c}}.$$

Dies impliziert $\omega \in \bigcap_{j=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}$.

$\supseteq$: Sei $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}$. Dies bedeutet, dass für alle $1 \leq j < \infty$,

$$\omega \in (A_j)^{\mathsf{c}}$$

oder äquivalent $\omega \notin A_j$. Dies impliziert $\omega \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und somit $\omega \in \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\mathsf{c}}$.

(b) Es gilt $\Omega \in \mathcal{F}$, und somit

$$\emptyset = \Omega^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}.$$

(c) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Es gilt auch $A_1^{\mathsf{c}}, A_2^{\mathsf{c}}, \ldots \in \mathcal{F}$. Somit folgt es, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$ gilt. Nun erhalten mit der De-Morgan Regel, dass

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^{\mathsf{c}}\right)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}.$$

(d) Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Wir definieren $A_1 := A$, $A_2 := B$ und für alle $i \geq 3$, $A_i := \emptyset$. Somit gilt es, dass

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

(e) Seien $A, B \in \mathcal{F}$, sodass $A^{\mathsf{c}}, B^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$. Aus (d) folgt nun $A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$. Es folgt somit, dass

$$A \cap B = (A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F},$$

wobei wir die De-Morgan Regel für zwei Mengen angewendet haben.

Aufgabe 1.4 [Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeige, dass $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$.

(b) Sei $k \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_k$ k paarweise disjunkte Ereignisse. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k].$$

(c) Sei A ein Ereignis. Zeige, dass $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$.

(d) Seien A und B zwei beliebige Ereignisse (nicht notwendigerweise disjunkt). Zeige, dass die Additionsregel

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

gilt.

Lösung 1.4

(a) Definiere $x = \mathbb{P}[\emptyset]$. Wir wissen bereits, dass $x \in [0, 1]$, da x die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist. Wir definieren nun $A_1 = A_2 = \cdots = \emptyset$ und haben somit

$$\emptyset = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Die Ereignisse A_i sind disjunkt und somit impliziert die abzählbare Additivität, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] = \mathbb{P}[\emptyset].$$

Da $\mathbb{P}[A_i] = x$ für jedes i gilt und $P[\emptyset] \leq 1$, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{\infty} x \leq 1,$$

und somit $x = 0$.

(b) Definiere $A_{k+1} = A_{k+2} = \cdots = \emptyset$. Auf diese Weise haben wir

$$A_1 \cup \cdots \cup A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Da die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, können wir die abzählbare Additivität wie folgt anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \\
&= \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k] + \underbrace{\sum_{i>k} \underbrace{\mathbb{P}[A_i]}_{=0}}_{=0}.
\end{aligned}$$

(c) Aufgrund der Definition des Komplements haben wir $\Omega = A \cup A^{\mathsf{c}}$, und somit

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[A \cup A^{\mathsf{c}}].$$

Da die beiden Ereignisse A, A^{c} disjunkt sind, impliziert (b), dass

$$1 = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^{\mathsf{c}}].$$

(d) $A \cup B$ ist die disjunkte Vereinigung von A und $B \setminus A$. Aufgrund von (b) folgt

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus A]. \tag{1}$$

Also $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^{\mathsf{c}}) = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$. Somit

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B \cap A] + \mathbb{P}[B \setminus A],$$

was $\mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$ impliziert. Wir können dies in Gleichung (1) einsetzen und erhalten damit das Resultat.