Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 2

Aufgabe 2.1 [Fast sicher]
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von fast sicher eintretenden Ereignissen, d.h. $\mathbb{P}[B_i] = 1, \forall i \geq 1$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1,$$

d.h. fast sicher treten *alle* (unendlich vielen) Ereignisse ein.

Lösung 2.1
Aufgrund der De-Morgan Regel (Aufgabe 1.3 (a)) gilt

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i)^{\mathsf{c}}\right].$$

Mithilfe des Union-Bound erhalten wir

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i)^{\mathsf{c}}\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[(B_i)^{\mathsf{c}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} 1 - \underbrace{\mathbb{P}[B_i]}_{=1} = 0,$$

da die Ereignisse B_i fast sicher eintreten. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] \geq 1$ und somit das gewünschte Resultat, da $\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right] \leq \mathbb{P}[\Omega] = 1$.

Aufgabe 2.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Federer vs. Nadal]
Wir analysieren einen Tennismatch von Roger Federer gegen Rafael Nadal. Der Match wird nach der Regel „best of 3“ gespielt; Sieger ist also, wer zuerst zwei Sätze gewinnt (es werden also maximal 3 Sätze gespielt). Wir nehmen an, dass Federer jeden einzelnen Satz – unabhängig von den anderen – mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$ gewinnt. Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass Federer den ersten Satz gewinnt, und B bezeichne das Ereignis, dass Federer den Match (also zwei Sätze) gewinnt.

(a) Drücke $A \cup B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ und $A \setminus B$ in Worten aus. Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[B^c|A]$, $P[B|A]$ und $P[B|A^c]$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Federer den Match gewinnt.

(c) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[A|B]$ und $P[A|B^c]$ mit Hilfe des Satzes von Bayes.

Lösung 2.2

(a) $A \cup B =$ „Federer gewinnt den ersten Satz oder gewinnt den Match.“
$A^c \cap B =$ „Federer verliert den ersten Satz und gewinnt den Match.
$A \cap B^c = A \setminus B =$ „Federer gewinnt den ersten Satz und verliert den Match.“

Zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten führen wir zusätzlich die Ereignisse $S_i =$ „Federer gewinnt den i-ten Satz“, $i = 1, 2, 3$, ein. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass $\mathbb{P}[S_i] = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, und dass S_1, S_2, S_3 unabhängig sind. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B^c \mid A] &= \frac{\mathbb{P}[B^c \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[S_1 \cap S_2^c \cap S_3^c]}{\mathbb{P}[S_1]} \overset{\text{Unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3^c]}{\mathbb{P}[S_1]} \\
&= \mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3^c] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\
\mathbb{P}[B \mid A] &= 1 - \mathbb{P}[B^c \mid A] = \frac{5}{9}, \\
\mathbb{P}[B \mid A^c] &= \frac{\mathbb{P}[B \cap A^c]}{\mathbb{P}[A^c]} = \frac{\mathbb{P}[S_1^c \cap S_2 \cap S_3]}{\mathbb{P}[S_1^c]} \overset{\text{Unabh.}}{=} \mathbb{P}[S_2]\mathbb{P}[S_3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen $\mathbb{P}[B]$ mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B|A^c]\,\mathbb{P}[A^c] = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{27}.$$

Alternativ können wir B schreiben als

$$B = (S_1 \cap S_2) \sqcup (S_1 \cap S_2^c \cap S_3) \sqcup (S_1^c \cap S_2 \cap S_3)$$

und erhalten dann mit Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[S_1 \cap S_2] + \mathbb{P}[S_1 \cap S_2^c \cap S_3] + \mathbb{P}[S_1^c \cap S_2 \cap S_3] \\
&= \mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2] + \mathbb{P}[S_1]\mathbb{P}[S_2^c]\mathbb{P}[S_3] + \mathbb{P}[S_1^c]\mathbb{P}[S_2]\mathbb{P}[S_3] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{27}.
\end{aligned}$$

(c) $A|B =$ „Federer hat den ersten Satz gewonnen, gegeben, dass er den Match gewonnen hat.“
$A|B^c =$ „Federer hat den ersten Satz gewonnen, gegeben, dass er den Match verloren hat.“
$\mathbb{P}[A|B]$ und $\mathbb{P}[A|B^c]$ berechnen wir mit dem Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{27}} = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{5}{7}, \quad \mathbb{P}[A|B^c] = \frac{\mathbb{P}[B^c|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B^c]} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{20}{27}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 2.3 [σ-Algebren & Zufallsvariablen]
Bei einem Zufallsexperiment werden ein grüner und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Wir betrachten zwei verschiedene σ-Algebren:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{F}_{sym} &:= \{A \subseteq \Omega : \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, (\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A\} \end{aligned}$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ enthält alle Teilmengen von Ω. In diesem Fall können wir also jedes Ergebnis des Zufallsexperiments beobachten, z.B. dass der blaue Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der grüne Würfel die Augenzahl 5. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{sym}$ enthält nur symmetrische Teilmengen von Ω (mit Blick auf das Vertauschen der beiden Würfel). In diesem Fall können wir uns vorstellen, dass wir eine Brille tragen, die es uns nicht erlaubt, die Farben der Würfel zu erkennen. Wir können also beispielsweise beobachten, dass ein Würfel die Augenzahl 3 zeigt und der andere die Augenzahl 5, aber nicht dass der Würfel mit der Augenzahl 3 blau ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{sym}$ eine σ-Algebra ist.
Hinweis: Überprüfe hierzu, dass die drei Eigenschaften aus der Definition erfüllt sind.

(b) Wir betrachten zwei Teilmengen von Ω:

$$\begin{aligned} A &:= \text{„Ein Würfel zeigt die Augenzahl 3 “}, \\ B &:= \text{„Der blaue Würfel zeigt die Augenzahl 3 “}. \end{aligned}$$

Zeige, dass $A \in \mathcal{F}_{sym}$, aber $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) Wir betrachten die Abbildungen

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{„Augenzahl des blauen Würfels“}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{„Augensumme der beiden Würfel“}$$

Zeige, dass X *keine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.
Zeige, dass S *eine* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$ ist.

Lösung 2.3

(a) Wir überprüfen die Eigenschaften aus der Definition einer σ-Algebra.

1. Nachdem für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ auch $(\omega_2, \omega_1) \in \Omega$ gilt, folgt direkt, dass $\Omega \in \mathcal{F}_{sym}$.
2. Sei nun $A \in \mathcal{F}_{sym}$. Somit gilt für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$

$$(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A,$$

was äquivalent ist zu

$$(\omega_1, \omega_2) \in A^{\mathsf{c}} \iff (\omega_2, \omega_1) \in A^{\mathsf{c}}.$$

Hieraus folgt $A^{\mathsf{c}} \in F_{sym}$.
3. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_{sym}$. Für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ gilt

$$(\omega_1, \omega_2) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i : (\omega_1, \omega_2) \in A_i \overset{A_i \in \mathcal{F}_{sym}}{\iff} \exists i : (\omega_2, \omega_1) \in A_i \iff (\omega_2, \omega_1) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

und somit folgt, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_{sym}$.

(b) Im Folgenden steht $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ für das Ergebnis, dass der grüne Würfel die Augenzahl ω_1 zeigt und der blaue Würfel die Augenzahl ω_2. Somit ist

$$A = \{(3, i) : i \in \{1, \dots, 6\}\} \cup \{(i, 3) : i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

und es gilt $(\omega_1, \omega_2) \in A \iff (\omega_2, \omega_1) \in A$ für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, also $A \in \mathcal{F}_{sym}$. Weiterhin ist

$$B = \{(i, 3) : i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

und wir stellen fest, dass $(1, 3) \in B$, aber $(3, 1) \notin B$. Somit gilt $B \notin \mathcal{F}_{sym}$.

(c) X: Wir überprüfen die Definition einer Zufallsvariable und sehen, dass

$$\Big\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : X\big((\omega_1, \omega_2)\big) \leq 1\Big\} = \{(i, 1) : i \in \{1, \dots, 6\}\} \notin \mathcal{F}_{sym},$$

wobei wir analog zu (b) festgestellt haben, dass die Menge nicht in $\mathcal{F}_{sym}$ ist, da sie das Ergebnis $(2, 1)$ enthält, aber nicht das Ergebnis $(1, 2)$. Somit ist X keine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$.

S: Wir überprüfen wieder die Definition einer Zufallsvariable und sehen, dass für $a \in \mathbb{R}$

$$\Big\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : S\big((\omega_1, \omega_2)\big) \leq a\Big\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 \leq a\} \in \mathcal{F}_{sym},$$

wobei wir genutzt haben, dass $\omega_1 + \omega_2 \leq a \iff \omega_2 + \omega_1 \leq a$. Somit ist S eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}_{sym})$.

Aufgabe 2.4 [Pendlerzüge]
In zwei verschiedenen Pendlerzügen wurden die insgesamt 780 Pendler gefragt, ob sie an einem bestimmten Morgen im überfüllten Pendlerzug einen Sitzplatz fanden oder nicht. Von den total 520 Leuten in Zug A hatten 70% einen Sitzplatz, von den 260 Leuten in Zug B jedoch nur gerade 50%. Desweiteren wurden die Pendler gefragt, ob sie mit dem Angebot der SBB im Allgemeinen zufrieden seien oder nicht. Die folgende Tabelle beschreibt für jede der vier Kombinationen aus Zug A/Zug B und Sitzplatz/kein Sitzplatz den Anteil der Pendler, die mit den SBB zufrieden sind.

Zufrieden	Zug A	Zug B
Sitzplatz	80%	70%
kein Sitzplatz	30%	40%

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler keinen Sitzplatz hatte?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler im Zug A war oder einen Sitzplatz hatte?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler, welcher einen Sitzplatz hatte, zufrieden ist mit den SBB?

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pendler nicht zufrieden ist mit den SBB.

Lösung 2.4
Wir definieren folgende Ereignisse:

$$A = \{\text{Pendler ist im Zug A}\}, \qquad B = \{\text{Pendler ist im Zug B}\},$$
$$S = \{\text{Pendler hat einen Sitzplatz}\}, \qquad Z = \{\text{Pendler ist mit den SBB zufrieden}\}.$$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S^c] &= \mathbb{P}[S^c \cap A] + \mathbb{P}[S^c \cap B] \\ &= \mathbb{P}[S^c \mid A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[S^c \mid B]\mathbb{P}[B] \\ &= 0.3 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A \cup S] &= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[S] - \mathbb{P}[A \cap S] \\ &= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[S] - \mathbb{P}[S \mid A]\mathbb{P}[A] \\ &= \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{11}{30}\right) - 0.7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{30} + \frac{19}{30} - \frac{14}{30} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

(c) Gesucht ist $P[Z \mid S]$. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt $\mathbb{P}[Z \mid S] = \frac{\mathbb{P}[Z \cap S]}{\mathbb{P}[S]}$, wobei $\mathbb{P}[S]$ aus (a) bekannt ist und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \cap S] &= \mathbb{P}[Z \cap S \cap A] + \mathbb{P}[Z \cap S \cap B] \\ &= \mathbb{P}[Z \mid S \cap A]\mathbb{P}[S \cap A] + \mathbb{P}[Z \mid S \cap B]\mathbb{P}[S \cap B] \\ &= \mathbb{P}[Z \mid S \cap A]\mathbb{P}[S \mid A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[Z \mid S \cap B]\mathbb{P}[S \mid B]P[B] \\ &= 0.8 \cdot 0.7 \cdot \frac{2}{3} + 0.7 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{112}{300} + \frac{35}{300} = \frac{147}{300}.\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{P}[Z \mid S] = \frac{147/300}{19/30} = 147/190$.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z^c] &= \mathbb{P}[Z^c \cap A] + \mathbb{P}[Z^c \cap B] \\
&= \mathbb{P}[Z^c \cap A \cap S] + \mathbb{P}[Z^c \cap A \cap S^c] + \mathbb{P}[Z^c \cap B \cap S] + \mathbb{P}[Z^c \cap B \cap S^c] \\
&= \mathbb{P}[Z^c \mid S \cap A]\mathbb{P}[S \cap A] + \mathbb{P}[Z^c \mid S^c \cap A]\mathbb{P}[S^c \cap A] \\
&\quad + \mathbb{P}[Z^c \mid S \cap B]\mathbb{P}[S \cap B] + \mathbb{P}[Z^c \mid S^c \cap B]\mathbb{P}[S^c \cap B] \\
&= 0.2 \cdot 0.7 \cdot \frac{2}{3} + 0.7 \cdot 0.3 \cdot \frac{2}{3} + 0.3 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.6 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{28}{300} + \frac{42}{300} + \frac{15}{300} + \frac{30}{300} = \frac{23}{60}.
\end{aligned}$$