Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 4

Aufgabe 4.1 [Bedingter Erwartungswert] Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine Partition von Ω. Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{E}[1_{B_i}\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[1_{B_i}X]$ gilt für jedes $i \in I$.

(b) Zeige, dass $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$.

Lösung 4.1

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[1_{B_i}\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]\big] &= \sum_{\omega \in B_i} P[\{\omega\}]\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}](\omega) = \sum_{\omega \in B_i} P[\{\omega\}]\left(\sum_{j \in I} 1_{B_j}(\omega)\mathbb{E}[X \mid B_j]\right) \\
&= \sum_{\omega \in B_i} P[\{\omega\}]\mathbb{E}[X \mid B_i] = \sum_{\omega \in B_i} P[\{\omega\}]\frac{\sum_{\omega' \in B_i} P[\{\omega'\}]X(\omega')}{P[B_i]} \\
&= \sum_{\omega' \in B_i} P[\{\omega'\}]X(\omega')\frac{\sum_{\omega \in B_i} P[\{\omega\}]}{P[B_i]} = \sum_{\omega' \in B_i} P[\{\omega'\}]X(\omega') \\
&= \mathbb{E}[1_{B_i}X].
\end{aligned}$$

(b) Aus (a) erhalten wir

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]\big] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}\big[1_{B_i}\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]\big] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[1_{B_i}X] = \mathbb{E}[X],$$

weil $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine Partition von Ω ist und somit $\sum_{i \in I} 1_{B_i} = 1$.

Aufgabe 4.2 [Zufällige Summe] Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $N, X_1, X_2, \ldots, X_9$ unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass

$$X_i \sim \mathrm{Ber}(p) \quad \text{und} \quad P[N = i] = q_i$$

für jedes $i \in \{1, \ldots, 9\}$, wobei $p, q_1, \ldots, q_9 \in (0, 1)$ und $q_1 + \cdots + q_9 = 1$. Wir betrachten die Summe $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ und die Partition $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in \{1,\ldots,9\}}$ von Ω gegeben durch $B_i = \{N = i\}$ für $i \in \{1, \ldots, 9\}$.

(a) Berechne $\mathbb{E}[S \mid \mathcal{B}]$ und $\mathbb{E}[S^2 \mid \mathcal{B}]$.

(b) Berechne $\mathbb{E}[S]$, $\mathbb{E}[S^2]$ und $\mathrm{Var}(S)$.

Lösung 4.2

(a) Wenn $N = i$, dann ist die bedingte Verteilung von $S = \sum_{j=1}^{i} X_j$ gleich $\mathrm{Bin}(i, p)$. Daher erhalten wir

$$\mathbb{E}[S \mid B_i] = ip \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[S^2 \mid B_i] = \mathbb{E}[S \mid B_i]^2 + ip(1-p) = ip(1 - p + ip).$$

Folglich gilt es

$$\mathbb{E}[S \mid \mathcal{B}](\omega) = \sum_{i=1}^{9} 1_{B_i}(\omega) ip.$$

und

$$\mathbb{E}[S^2 \mid \mathcal{B}](\omega) = \sum_{i=1}^{9} 1_{B_i}(\omega) ip(1 - p + ip).$$

(b) Aus Aufgabe 1 erhalten wir

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S \mid \mathcal{B}]\big] = \sum_{i=1}^{9} \mathbb{E}[1_{B_i} ip] = \sum_{i=1}^{9} P[B_i] ip = \sum_{i=1}^{9} ipq_i$$

und ebenfalls

$$\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S^2 \mid \mathcal{B}]\big] = \sum_{i=1}^{9} P[B_i] ip(1 - p + ip) = \sum_{i=1}^{9} ip(1 - p + ip) q_i.$$

Somit berechnen wir

$$\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 = \sum_{i=1}^{9} ip(1 - p + ip) q_i - \left(\sum_{i=1}^{9} ipq_i \right)^2.$$

Aufgabe 4.3 [Momentenerzeugende Funktion] Seien X_1, X_2 diskrete unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

(a) Zeige die Faltungsformel

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0\colon \qquad P[X_1 + X_2 = k] = \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j]P[X_2 = k - j]. \tag{1}$$

(b) Die Momentenerzeugende Funktion einer diskreten Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist definiert als

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\colon \qquad M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} P[X = k]. \tag{2}$$

Zeige, dass

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\colon \qquad M_{X_1+X_2}(s) = M_{X_1}(s)M_{X_2}(s). \tag{3}$$

Lösung 4.3

(a) Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit impliziert, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 = k] &= \sum_{j=0}^{k} P[X_1 + X_2 = k | X_1 = j]P[X_1 = j] \\ &= \sum_{j=0}^{k} P[X_2 = k - j | X_1 = j]P[X_1 = j] \\ &= \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j]P[X_2 = k - j]. \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Mit Teilaufgabe a) kriegen wir, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} P[X_1 + X_2 = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j]P[X_2 = k - j] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} e^{sj} P[X_1 = j] e^{s(k-j)} P[X_2 = k - j] \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{sj} P[X_1 = j] \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{sl} P[X_1 = l] \right) \\ &= M_{X_1}(s)M_{X_2}(s). \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 4.4 [Prüfziffer]

Sei $N \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge

$$\Omega = \{0,1\}^N = \big\{(a_1, \dots, a_N) : a_1, \dots, a_N \in \{0,1\}\big\}$$

sowie $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und das Wahrscheinlichkeitsmass P definiert durch

$$P\big[\{(a_1, \dots, a_N)\}\big] = \begin{cases} 2^{-N+1}, & \text{falls } a_1 + \dots + a_N \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $X_1, \dots, X_N$ Zufallsvariablen definiert durch $X_i((a_1, \dots, a_N)) = a_i$.

(a) Zeige, dass $X_1, \dots, X_{N-1}$ unabhängig sind.

(b) Zeige, dass $X_1, \dots, X_N$ nicht unabhängig sind.

Lösung 4.4

(a) Für jedes $a_i \in \{0,1\}$ gibt es 2^{N-2} Vektoren $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N) \in \{0,1\}^{N-1}$, für welche $a_1 + \dots + a_N$ gerade ist. Somit gilt es

$$P[X_i = a_i] = 2^{N-2} 2^{-N+1} = \frac{1}{2}.$$

Ebenfalls gibt es für jeden Vektor $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N) \in \{0,1\}^{N-1}$ genau einen Wert von $a_N \in \{0,1\}$, für welchen $a_1 + \dots + a_N$ gerade ist. Daher ist

$$P[X_1 = a_1, \dots, X_{N-1} = a_{n-1}] = 2^{-N+1} = \prod_{i=1}^{N-1} P[X_i = a_i].$$

Wir schliessen daraus, dass $X_1, \dots, X_{N-1}$ unabhängig sind.

(b) Es gilt

$$P[X_1 = 0, \dots, X_N = 0] = 2^{-N+1} \neq \prod_{i=1}^{N} P[X_i = 0] = 2^{-N},$$

und deshalb sind $X_1, \dots, X_N$ nicht unabhängig.