Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 6

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 6.1 [Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte]
Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T.

(b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

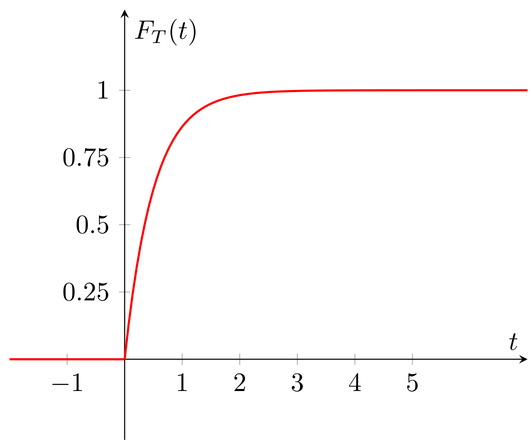
(c) Bereche die Dichte von T.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[T = 2],\ \mathbb{P}[T \leq 1],\ \mathbb{P}[T \geq 2],\ \mathbb{P}[1 < T < 4].$$

Lösung 6.1

(a) Die folgende Skizze zeigt die Verteilungsfunktion von T:



(b) Wir stellen fest, dass die Verteilungsfunktion F_T stückweise stetig differenzierbar ist. Genauer gesagt ist F_T auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar. Somit ist T eine stetige Zufallsvariable.

(c) Da F_T stückweise stetig differenzierbar ist, können wir F ableiten, um die Dichte von T zu berechnen. Wir erhalten

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 2e^{-2t} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

wobei wir den Wert an der Stelle $t = 0$ beliebig gewählt haben.

(d) Da die Zufallsvariable T stetig ist, gilt $\mathbb{P}[T = t] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit gilt insbesondere

$$\mathbb{P}[T = 2] = 0.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T \leq 1] &= F_T(1) = 1 - e^{-2}, \\
\mathbb{P}[T \geq 2] &= 1 - \mathbb{P}[T < 2] = 1 + \underbrace{\mathbb{P}[T = 2]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 2]}_{=F_T(2)} = e^{-4}, \\
\mathbb{P}[1 < T < 4] &= \mathbb{P}[T < 4] - \mathbb{P}[T \leq 1] = \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 4]}_{=F_T(4)} - \underbrace{\mathbb{P}[T = 4]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 1]}_{=F_T(1)} = e^{-2} - e^{-8}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 [Anwendung der Exponentialverteilung]
Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimme λ.

Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Lösung 6.2

(a) Gemäss Annahme in der Aufgabenstellung gilt $\mathbb{P}[Y \leq 1] = \frac{1}{20}$, also $\mathbb{P}[Y > 1] = 0.95$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}$ für eine $\text{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable T. Es muss also gelten

$$0.95 = e^{-\lambda}$$

und somit ist $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt, ist

$$\mathbb{P}[Y > 10] = e^{-\lambda \cdot 10} = e^{10 \ln(0.95)} = (0.95)^{10} \approx 0.5987.$$

Alternativ ist

$$P[Y > 10] = 1 - P[Y \leq 10] = 1 - F_Y(10) = 1 - (1 - e^{\ln(0.95)10}) = 0.95^{10}.$$

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, also dass für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}[T > t + s | T > t] = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}[T > s].$$

Also folgt, dass

$$\mathbb{P}[Y > 30 | Y > 20] = \mathbb{P}[Y > 10] = 0.95^{10}.$$

Aufgabe 6.3 [Erwartungswert stetiger ZVen I]
Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

(a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Berechne die Dichte von $U' := a + (b-a)U$. Was ist der Erwartungswert von U'?

(b) (*) Sei $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne die Dichte von $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T'?

Lösung 6.3

(a) Sei $U' := a + (b-a)U$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$F_{U'}(x) = P[U' \leq x] = P\left[U \leq \frac{x-a}{b-a}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} < 0, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1, \\ 1 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} > 1. \end{cases}$$

Durch Umformen folgt, dass

$$F_{U'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

Also ist $U' \sim \mathcal{U}(a,b)$. Es gilt auch

$$\mathrm{E}[U'] = a + (b-a)\mathrm{E}[U] = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

(b) Da $T' \geq 0$ ist $F_{T'}(x) = 0$ für $x < 0$. Für $x \geq 0$ gilt es

$$F_{T'}(x) = \mathbb{P}[T' \leq x] = \mathbb{P}\left[T \leq \sqrt{\frac{x}{c}}\right] = F_T\left(\sqrt{\frac{x}{c}}\right) = 1 - \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{x}{c}}\right).$$

Daher ist

$$f_{T'}(x) = F'_{T'}(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{cx}} \exp\left(-\lambda\sqrt{\frac{x}{c}}\right)$$

fûr $x \geq 0$, und $f_{T'}(x) = 0$ für $x < 0$.

Aufgrund der Lineariät des Erwartungswerts gilt $\mathrm{E}[T'] = \mathrm{E}[cT^2] = c \cdot \mathrm{E}[T^2]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T^2] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx}_{=\frac{2}{\lambda}\mathrm{E}[T]} = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{E}[T] = 1/\lambda$ verwendet haben. Somit folgt

$$\mathrm{E}[T'] = \frac{2c}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 6.4 [Erwartungswert stetiger ZVen II] (*)
Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

(a) Bestimme die Konstante c, sodass f zu einer Dichtefunktion wird.

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechne den Erwartungswert von X. Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?

Lösung 6.4

(a) Wir bemerken zuerst, dass $f \geq 0$. Damit f zu einer Dichtefunktion wird, muss

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} cx^{-r}dx = c\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{c}{r-1}$$

gelten. Mit $c = r - 1$ wird somit f zu einer Dichtefunktion.

(b) Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Für $t \leq 1$ ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0,$$

da $f_X(x) = 0$ für $x \leq 1$. Für $t > 1$ ist

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{1}^{t} f_X(x)dx = \int_{1}^{t} (r-1)x^{-r}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_{x=1}^{x=t} \\ &= -(t^{-r+1} - 1) = 1 - t^{-r+1}. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist demnach gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 - t^{-r+1} & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

(c) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathbb{P}[X \geq 1] = 1$ und somit ist der Erwartungswert von X wohldefiniert, da X positive Werte annimmt. Wir berechnen für $r \neq 2$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} (r-1)x^{-r+1}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+2}x^{-r+2}\right]_1^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{r-1}{r-2}, & \text{falls } r > 2, \\ \infty, & \text{falls } r \in (1, 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Für $r = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \\
&= \int_{1}^{+\infty} (r-1)x^{-1}dx \\
&= (r-1)\left[\log(x)\right]_1^{\infty} = \infty.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist also endlich, falls $r > 2$.