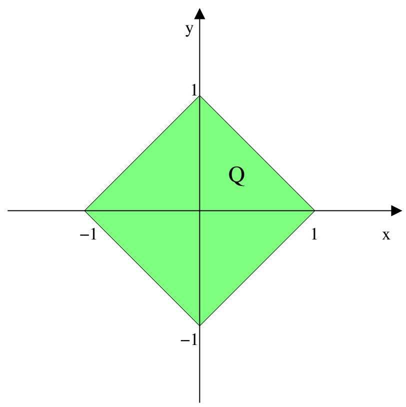
Prof. Josef Teichmann
David Martins

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 8

Die Übungen mit (*) markiert sind fakultativ.

Aufgabe 8.1 [Quadrat]
Die gemeinsame Dichte $f(x,y)$ zweier stetiger Zufallsvariablen X, Y sei im Quadrat Q (vgl. Skizze) konstant und verschwinde ausserhalb von Q.



(a) Bestimme die gemeinsame Dichte von (X, Y).

(b) Bestimme die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y.

(c) Bestimme die bedingte Verteilung von X gegeben Y. Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

(d) Was ist die Antwort in (c), wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

Lösung 8.1

(a) Die Fläche von Q ist $4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 2$. Deshalb können wir schliessen, dass die gemeinsame Dichte f durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } (x,y) \in Q, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben ist.

(b) Für die Randdichte f_X sind 2 Fälle zu unterscheiden. Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} y \Big|_{-1-x}^{1+x} = \frac{1}{2}(1+x+1+x) = 1+x.$$

Für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} y \Big|_{-1+x}^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x+1-x) = 1-x.$$

Also ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & \text{falls } -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{falls } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Symmetrie ist $f_Y = f_X$, d.h.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y & \text{falls } -1 \le y \le 0, \\ 1-y & \text{falls } 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Für $x, y \in [-1, 1]$ gilt es

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathbb{1}_{(x,y)\in Q}}{2 f_Y(y)} \\ &= \frac{\mathbb{1}_{-1+|y|\le x \le 1-|y|}}{2-2|y|}. \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir die bedingte Verteilung $X|Y \sim U(-1+|Y|, 1-|Y|)$. Da die bedingte Verteilung von X gegeben Y vom Wert von Y abhängt, sind X und Y nicht unabhängig. Das können wir auch schliessen, weil $f_X(x) f_Y(y) \not\equiv \frac{1}{2} = f(x,y)$.

(d) Dank der Symmetrie kann man immer noch schliessen, dass in diesem Fall die Randdichten gleich sind; zudem sind sie aber auch konstant auf dem Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, d.h.

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2} = f(x,y)$ erhalten wir in diesem Fall, dass die Zufallsvariablen X und Y dann unabhängig sind. Deshalb ist auch

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

falls $x, y \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, und 0 sonst.

Aufgabe 8.2 [Korrelation & Unabhängigkeit]
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

d.h. die Zufallsvariablen sind unkorreliert. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht gilt.

(a) Sei $X \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$. Zeige, dass $Y := \cos(X)$ und $Z := \sin(X)$ unkorreliert sind, d.h.

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0.$$

(b) (*) Zeige, dass Y und Z nicht unabhängig sind.

Lösung 8.2

(a) Wir zeigen zuerst, dass Y und Z unkorreliert sind. Nach Definition der Kovarianz ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y, Z) &= \mathrm{E}[YZ] - \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Z] \\
&= \mathrm{E}[\cos(X)\sin(X)] - \mathrm{E}[\cos(X)]\mathrm{E}[\sin(X)] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx,
\end{aligned}$$

und mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx = \left[\sin^2(x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx = 0$$

und

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx = 0.$$

Alternativ: Aus $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ folgt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx = -\frac{1}{4}[\cos(2x)]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

wegen $\cos(2\pi) = \cos(-2\pi) = 1$.

(b) Wir zeigen nun, dass Y und Z nicht unabhängig sind. Wegen

$$Y^2 + Z^2 = \cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$$

ist

$$0 \le P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] \le P[Y^2 + Z^2 < 1] = 0.$$

Jedoch ist

$$
\begin{aligned}
P[Y^2 < 1/2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\cos^2(y) < 1/2\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{-1/\sqrt{2} < \cos(y) < 1/\sqrt{2}\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\pi/4 < y < 3\pi/4\} \sqcup \{-3\pi/4 < y < -\pi/4\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} - \frac{-3\pi}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Analog erhält man

$$P[Z^2 < 1/2] = \frac{1}{2}.$$

Angenommen Y und Z sind unabhängig. Dann sind auch Y^2 und Z^2 unabhängig. Wegen

$$P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] = 0 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[Y^2 < 1/2] P[Z^2 < 1/2]$$

ist dies jedoch ein Widerspruch. Also sind Y und Z unkorreliert, aber nicht unabhängig.

Aufgabe 8.3 [Normalverteilung]
Sei $n \geq 1$ und $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(1,4)$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

und

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Zur Erinnerung: Wir schreiben $\Phi(a) = \mathbb{P}[Z \leq a]$ für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Numerische Werte für Φ finden sich in der Tabelle der Standardnormalverteilung (s.175 im Skript von M. Schweizer).

(a) Bestimme die Verteilung von S_n sowie $\bar{X}_n$.
Hinweis: Nutze die Eigenschaften der Normalverteilung.

(b) Bestimme die bedingte Verteilung von S_n gegeben X_1.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\mathrm{E}[X_1] - 1 \leq X_1 \leq \mathrm{E}[X_1] + 1]$.

(d) Berechne $\mathbb{P}[\mathrm{E}[S_n] - 1 \leq S_n \leq \mathrm{E}[S_n] + 1]$ für $n = 50$.

(e) Berechne $\mathbb{P}[\mathrm{E}[\bar{X}_n] - 1 \leq \bar{X}_n \leq \mathrm{E}[\bar{X}_n] + 1]$ für $n = 50$.

Lösung 8.3

(a) Die Zufallsvariablen $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sind unabhängig und normalverteilt mit $m_i = \mathrm{E}[X_i] = 1$ und $\sigma_i^2 = \mathrm{E}[(X_i - m_i)^2] = 4$ für alle $1 \leq i \leq n$. Aus den Eigenschaften der Normalverteilung folgt, dass $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $m_S = \sum_{i=1}^n m_i = n$ und Varianz $\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 4n$.

Aus den Eigenschaften der Normalverteilung folgt ebenfalls, dass $\bar{X}_n = S_n/n$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $m_{\bar{X}} = m_S/n = 1$ und Varianz $\sigma_{\bar{X}}^2 = (1/n)^2\sigma_S^2 = 4/n$.

(b) Da $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, sind X_1 und $Y := X_2 + \cdots + X_n$ auch unabhängig mit $Y \sim \mathcal{N}(n-1, 4(n-1))$. Deshalb schliessen wir, dass die gemeinsame dichte von X_1 und Y gegeben ist durch

$$f_{X_1,Y}(x,y) = f_{X_1}(x)f_Y(y) = \frac{1}{32\pi(n-1)} \exp\left(- \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(y-n+1)^2}{8(n-1)} \right)$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Betrachte die lineare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(x,y) = (x, x_1 + y),$$

d.h. $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da B eine Dreiecksmatrix ist, sehen wir einfach, dass B ist umkehrbar mit $\det B = 1$. Wir haben auch

$$g(X_1, Y) = (X_1, X_1 + Y) = (X_1, S_n).$$

Aus dem Transformationssatz bekommen wir dann

$$f_{X_1,S_n}(x,z) = f_{X_1,Y}(x, z-x) = \frac{1}{32\pi(n-1)} \exp\left(- \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(z-x-n+1)^2}{8(n-1)} \right)$$

für $x, z \in \mathbb{R}$. Damit ist die bedingte Dichte von Z gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{S_n|X_1}(z \mid x) &= \frac{f_{X_1,S_n}(x,z)}{f_{X_1}(x)} \\ &= \frac{4\sqrt{2\pi}}{32\pi(n-1)} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(z-x-n+1)^2}{8(n-1)} + \frac{(x-1)^2}{8} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}(n-1)} \exp\left(-\frac{(z-x-n+1)^2}{8(n-1)} \right). \end{aligned}$$

Als Abkürzung kann man auch schreiben, dass die bedingte Verteilung von S_n gegeben X_1 ist $\mathcal{N}(X_1 + n - 1, 4(n-1))$.

Wir verwenden nun die folgende Eigenschaft der Normalverteilung: Sei Y eine $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Dann ist

$$Z = \frac{Y-m}{\sqrt{\sigma^2}}$$

eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

(c) X_1 ist normalverteilt mit $\mathcal{N}(\mu_{X_1} = 1, \sigma^2_{X_1} = 4)$. Durch Standardisieren erhalten wir $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ wobei $Z = \frac{X_1 - 1}{2}$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big[E[X_1] - 1 \leq X_1 \leq \mathrm{E}[X_1] + 1\big] &= \mathbb{P}[0 \leq X_1 \leq 2] = \mathbb{P}\Big[-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}\Big] \\ &= \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big] - \Phi\Big[-\frac{1}{2}\Big] = \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big] - \Big[1 - \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big]\Big] \\ &= \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big] + \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big] - 1 = 2 \cdot \Phi\Big[\frac{1}{2}\Big] - 1 \\ &= 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.38292, \end{aligned}$$

wobei wir den numerischen Wert von $\Phi(1/2)$ aus der Tabelle abgelesen haben.

(d) Für $n = 50$ erhalten wir, dass S_{50} den Erwartungswert $m_S = 50$ und die Varianz $\sigma^2_S = 200$ hat. Durch Standardisieren ist $Z = \frac{S_{50} - 50}{\sqrt{200}}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Es folgt:

$$P[49 \leq S_n \leq 51] = P[-0.07 \leq Z \leq 0.07] = 2 \cdot \Phi[0.07] - 1 = 2 \cdot 0.5279 - 1 = 0.0558.$$

(e) Für $n = 50$ erhalten wir, dass $\bar{X}_{50}$ den Erwartungswert $m_{\bar{X}} = 1$ und die Varianz $\sigma^2_{\bar{X}} = 0.08$ hat. Durch Standardisieren ist $Z = \frac{\bar{X}_{50} - 1}{\sqrt{0.08}}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Es folgt:

$$P[0 \leq \bar{X}_{50} \leq 2] = P[-3.5 \leq Z \leq 3.5] = 2 \cdot \Phi[3.5] - 1 = 2 \cdot 0.99977 - 1 = 0.99954.$$

Aufgabe 8.4 [Extrema gleichverteilter ZVen] (*)
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne die Dichte von M und die Dichte von L.

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\mathrm{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die gemeinsame Verteilungsfunktion und die gemeinsame Dichte von (M, L) zu bestimmen.

Lösung 8.4

(a) Wir bestimmen die Verteilungsfunktion und leiten diese dann ab.

Wir bemerken zuerst, dass der Wertebereich von M das Einheitsintervall $[0,1]$ ist. Für $m \in [0,1]$ gilt mit der Unabhängigkeit und der Gleichverteilung von U_1, U_2 und U_3, dass

$$P[M \le m] = P[U_1 \le m, U_2 \le m, U_3 \le m] = (P[U_1 \le m])^3 = m^3.$$

Also ist die Verteilungsfunktion F_M von M gegeben durch

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ m^3 & \text{für } 0 \le m \le 1, \\ 1 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Für $m \in (0,1)$ gilt also

$$f_M(m) = F'_M(m) = 3m^2,$$

und somit ist die Dichte von M gegeben durch

$$f_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ 3m^2 & \text{für } 0 \le m \le 1, \\ 0 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Um die Dichte von L zu bestimmen, kann man analog vorgehen. In diesem Fall erhält man $f_L(\ell) = 3(1-\ell)^2 \mathbb{1}_{\ell \in [0,1]}$.

(b) Seien $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt. Mittels der gemeinsamen Dichte von U_1, U_2, U_3 berechnen wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right) \mathbb{1}_{u_1 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3 \in [0,1]} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right) du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden wieder verschiedene Fällen, je nachdem welche Variable das Maximum und welche das Minimum annimmt. Es gilt

$$1 = \sum_{i,j,k : \{i,j,k\} = \{1,2,3\}} \mathbb{1}_{u_i \le u_j \le u_k},$$

wobei wir über die sechs möglichen Permutationen von $(1,2,3)$ summiert haben. Wir berechnen nun das Integral für den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \psi\left(\min(u_1,u_2,u_3)\right) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \psi\left(u_3\right) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\
&= \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \left(\int_0^{u_1} \psi(u_3) \underbrace{\left(\int_{u_3}^{u_1} du_2 \right)}_{=u_1 - u_3} du_3 \right) du_1 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \psi(u_3)(u_1 - u_3) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_1} du_1 du_3
\end{aligned}
$$

Da die sechs Fälle symmetrisch sind, erhalten wir

$$
\mathrm{E}[\phi(M)\psi(L)] = 6 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m)\psi(\ell)(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell,
$$

was zu zeigen war.

(c) Für $a, b \in R$ wählen wir $\phi(x) := \mathbb{1}_{x \leq a}$ und $\psi(x) := \mathbb{1}_{x \leq b}$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
F_{M,L}(a,b) = \mathbb{P}[M \leq a, L \leq b] &= \mathrm{E}[\mathbb{1}_{M \leq a} \cdot \mathbb{1}_{L \leq b}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{m \leq a} \mathbb{1}_{\ell \leq b} \cdot 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell \\
&= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell
\end{aligned}
$$

und somit folgt es, dass (M, L) die gemeinsame Dichte

$$
f_{M,L}(m,\ell) = 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1}
$$

hat. Um die Verteilungsfunktion zu erhalten, berechnen wir obiges Integral. Wir stellen zunächst fest, dass die Verteilungsfunktion für $a \notin [0,1]$ oder $b \notin [0,1]$ leicht zu bestimmen ist. Genauer gilt für $a \leq 0$ oder $b \leq 0$, dass $F_{M,L}(a,b) = 0$, für $b \geq 1$ erhalten wir

$$
F_{M,L}(a,b) = F_M(a) = a^3
$$

und für $a \geq 1$,

$$
F_{M,L}(a,b) = F_L(b) = 1 - (1-b)^3.
$$

Weiterhin gilt für $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$
F_{M,L}(a,b) = \mathbb{P}[M \leq a, L \leq b] \overset{(L \leq M)}{=} \mathbb{P}[M \leq a] = a^3.
$$

Für $1 \leq b \leq a \leq 1$ berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[M \leq a, L \leq b] &= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell = \int_0^a \left(\int_0^{\min(b,m)} 6(m-\ell)\, d\ell \right) dm \\
&= \int_0^a \left[6m\ell - 3\ell^2 \right]_0^{\min(b,m)} dm = \int_0^b 3m^2 \, dm + \int_b^a 3b(2m-b)\, dm \\
&= b^3 + \left[3b(m^2 - bm) \right]_b^a = b^3 + 3ab(a-b).
\end{aligned}
$$