Lösung 1

1. *Programming for fun: Conways Spiel des Lebens* [1]

Siehe `conwayGameOfLife.m`.

2. *Die Simpson-Regel*

a) Die Lagrange Polynome sind gegeben durch

$$L_j^n(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Wir erhalten

$$L_0^2(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq 0}}^{2} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(2x - a - b)(x - b)}{(a - b)^2},$$

$$L_1^2(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 4\frac{(x - a)(x - b)}{(b - a)(a - b)},$$

$$L_2^2(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(2x - a - b)(x - a)}{(a - b)^2}.$$

b) Die Gewichte sind definiert durch

$$\omega_j = \int_a^b L_j^n(x)dx.$$

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Conways_Spiel_des_Lebens`

Bitte wenden!

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \int_a^b L_0^2(x)dx = \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b (2x-a-b)(x-b)dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left(b(a+b)x - \frac{a+3b}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = \frac{b-a}{6}, \\
\omega_1 &= \int_a^b L_1^2(x)dx = \frac{4}{(b-a)(a-b)}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= \frac{4}{(b-a)(a-b)}\left(abx - \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = 4\frac{b-a}{6}, \\
\omega_2 &= \int_a^b L_2^2(x)dx = \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b (2x-a-b)(x-a)dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left(a(a+b)x - \frac{b+3a}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = \frac{b-a}{6}.
\end{aligned}$$

c) Wir haben

$$\begin{aligned}
S[1] &= \sum_{j=0}^{2} \omega_j 1 = \frac{2}{6}(1+4+1) = 2 = I[1], \\
S[x] &= \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j = \frac{2}{6}(-1+4\cdot 0+1) = 0 = I[x], \\
S\left[x^2\right] &= \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^2 = \frac{2}{6}(1+4\cdot 0+1) = \frac{2}{3} = I\left[x^2\right], \\
S\left[x^3\right] &= \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^3 = \frac{2}{6}(-1+4\cdot 0+1) = 0 = I\left[x^3\right], \\
S\left[x^4\right] &= \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^4 = \frac{2}{6}(1+4\cdot 0+1) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = I\left[x^4\right].
\end{aligned}$$

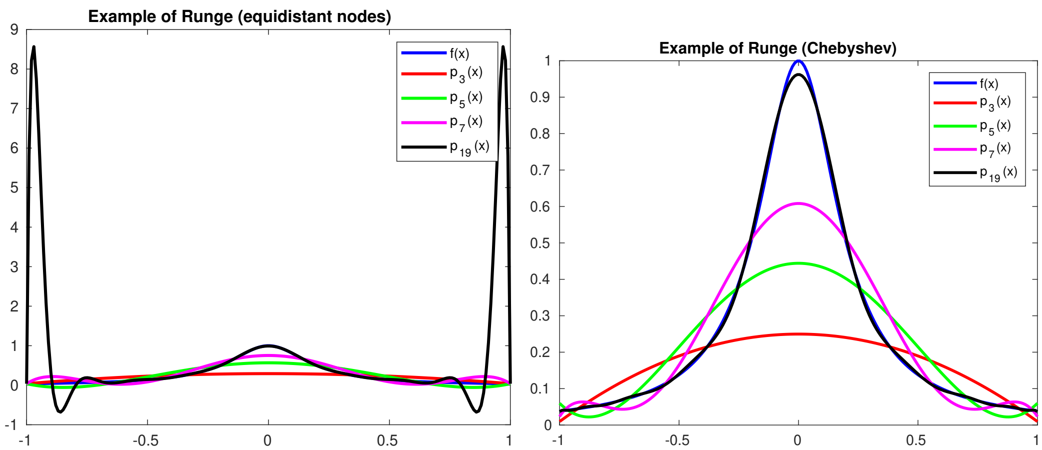
Man beobachtet, dass die Simpson-Regel Polynome bis Grad 3 exakt integrieren kann, d.h. ein Grad mehr als man vom zugrundelegenden quadratischen Interpolationspolynom erwarten würde.

3. *Runges Phänomen*

Für den Code, siehe `runge_equi.m` und `runge_cheby.m`. Wenn nur 6 Stützstellen verwendet werden, sieht man in Abbildung 1 keinen grossen Unterschied. Die

Siehe nächstes Blatt!

Approximation mit äquidistanten Stützstellen wird jedoch sehr schlecht, wenn die Anzahl von Punkten erhöht wird. Im Gegenteil, wird die Approximation mit intelligent verteilte Stützstellen besser.



(a) (b)

Abbildung 1: Approximation mit (a) äquidistanten Stützstellen und mit (b) intelligent verteilte Stützstellen.