

## Lösung 2

### 1. Genauigkeitsgrad maximieren

- a) In the given quadrature formula, the 3 quadrature weights are unknown. To determine these 3 degrees of freedom, we need 3 equations. We obtain these from the definition of the **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)** of a quadrature formula, see the lecture notes *Kap01\_Notizen.pdf, page 15*. We also note that  $I[f]$  and  $Q[f]$  are **linear**. Therefore, we test the given quadrature formula for exact integration with respect to the monomials  $1, x, x^2$ :

$$Q[1] = \alpha + \beta + \gamma = I[1] = 1, \quad (1a)$$

$$Q[x] = \frac{\beta}{2} + \gamma = I[x] = \frac{1}{2}, \quad (1b)$$

$$Q[x^2] = \frac{\beta}{4} + \gamma = I[x^2] = \frac{1}{3}. \quad (1c)$$

Now, we solve this linear system of equations (1). Subtracting (1c) from (1b),

$$\frac{\beta}{4} = 1/6 \implies \beta = \frac{4}{6}.$$

Using the value of  $\beta$  in (1b), we get

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{6}.$$

Then, substituting values of  $\beta$  and  $\gamma$  in (1a),

$$\alpha = \frac{1}{6}.$$

- b) We want to approximate the integral  $I_{[a,b]}[f] := \int_a^b f(x)dx$ . If we can find an equivalent integral  $I_{[a,b]}[f] = I_{[0,1]}[\tilde{f}] := \int_0^1 \tilde{f}(\xi)d\xi$ , then we can use the given quadrature formula  $Q[\tilde{f}]$  to approximate  $I_{[a,b]}[f]$ . We use the transformation (see the lecture notes *Kap01\_Notizen.pdf, page 16*)

$$x = a + (b - a)\xi, \quad \forall \xi \in [0, 1].$$

One can verify that at  $\xi = 0$ ,  $x = a$  and at  $\xi = 1$ ,  $x = b$ .

**Bitte wenden!**

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\xi} &= (b-a), \\ \implies I_{[a,b]}[f] &= \int_0^1 (b-a) \cdot f(a + (b-a)\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = (b-a) \cdot f(a + (b-a)\xi)], \\ &= I_{[0,1]}[\tilde{f}].\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}] \\ &= \frac{1}{6}(\tilde{f}(0) + 4\tilde{f}(1/2) + \tilde{f}(1)) \\ &= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).\end{aligned}$$

This we know is the **Simpson rule**.

## 2. 2-Punkte Gauss Quadraturregel

- a) In the given quadrature formula, the quadrature nodes and weights are unknown. To determine these degrees of freedom such that the **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)**  $q = 3$ , we test the given quadrature formula for exact integration with respect to monomials  $x^j$ , for  $j = 0, 1, \dots, q$ ,

$$Q[1] = 2(\omega_0 + \omega_1) = I[1] = 2, \quad (2a)$$

$$Q[x] = 2(\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1) = I[x] = 0, \quad (2b)$$

$$Q[x^2] = 2(\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2) = I[x^2] = \frac{2}{3}, \quad (2c)$$

$$Q[x^3] = 2(\omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3) = I[x^3] = 0. \quad (2d)$$

From (2a),

$$\omega_1 = 1 - \omega_0.$$

Using this in (2b),

$$x_1 = -\omega_0 x_0 / (1 - \omega_0).$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Then from (2d),

$$\begin{aligned}
 \omega_0 x_0^3 &= -\omega_1 x_1^3 \\
 &= -(1 - \omega_0) \left( -\frac{\omega_0 x_0}{1 - \omega_0} \right)^3 \\
 &= \frac{\omega_0^3 x_0^3}{(1 - \omega_0)^2}, \\
 \rightsquigarrow \omega_0 &= 1/2. \\
 \implies \omega_1 &= 1/2, \quad x_1 = -x_0
 \end{aligned}$$

Finally, using the above information in (2c) yields

$$x_0 = \mp 1/\sqrt{3}, \quad x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$$

and

$$Q[f] = f(-1/\sqrt{3}) + f(+1/\sqrt{3}).$$

**b)** We proceed similar to the solution of **1b)**. Here, the transformation will be

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi, \quad \forall \xi \in [-1, 1].$$

One can verify that at  $\xi = -1$ ,  $x = a$  and at  $\xi = 1$ ,  $x = b$ .

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\xi} &= \frac{b-a}{2}, \\
 \implies I_{[a,b]}[f] &= \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right) d\xi \\
 &= \int_{-1}^1 \tilde{f}(\xi) d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)], \\
 &= I_{[-1,1]}[\tilde{f}].
 \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}
 I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}] \\
 &= \tilde{f}(-1/\sqrt{3}) + \tilde{f}(+1/\sqrt{3}) \\
 &= \frac{b-a}{2} \left\{ f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}b\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

### 3. Uneigentliches Integral mit Quadratur

**Bitte wenden!**

a) For  $x = \tan(s)$ , we have

$$\frac{dx}{ds} = \sec^2(s).$$

Thus, we can write

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) dx = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \exp(-\tan^4(s)) \sec^2(s) ds.$$

b) With  $x = -\log(s)$  we have

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{s},$$

and thus

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) dx = \int_1^0 \exp(-(-\log(s))^4) \frac{-1}{s} ds = \int_0^1 \frac{\exp(-\log^4(s))}{s} ds.$$

(Note that the transformation  $x = -\log(s)$  is decreasing, so the interval of integration is reversed.)

#### 4. Numerische Differentiation: Finite Differenzen

a) Wir betrachten das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} f(x) &\approx p[f|x_0, x_1, x_2](x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) L_i^2(x) \\ &= f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \\ &\quad + f(x_1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\ &\quad + f(x_2) \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{aligned}$$

Dann erhalten wir eine Approximation der ersten

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx p'[f|x_0, x_1, x_2](x) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}(2x - (x_1+x_2)) \\ &\quad + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}(2x - (x_0+x_2)) \\ &\quad + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}(2x - (x_0+x_1)) \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

und zweiten Ableitung

$$f''(x) \approx p'' [f|x_0, x_1, x_2] (x) = 2 \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + 2 \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + 2 \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

b) Nun setzen wir  $x_0 = x - h$ ,  $x_1 = x$  und  $x_2 = x + h$ . Damit erhalten wir für die Approximation der ersten und zweiten Ableitung folgende einfache finite Differenzen Formeln:

$$f'(x) \approx p' [f|x_0, x_1, x_2] (x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx p'' [f|x_0, x_1, x_2] (x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Um den Fehler der Approximation der ersten Ableitung zu analysieren, benötigen wir folgende Taylor-Entwicklungen (mit Restglied)

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi_1)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi_2)$$

wobei  $\xi_1 \in [x-h, x]$  und  $\xi_2 \in [x, x+h]$ . Setzen wir dies in obige finite Differenzen Formel für die erste Ableitung ein, erhalten wir

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{1}{12}h^2 (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

$$= f'(x) + \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi) = \mathcal{O}(h^2).$$

Im vorletzten Schritt haben wir den Zwischenwertsatz (bekannt aus der Analysis) verwendet. Dieser garantiert uns, dass wir ein  $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset [x-h, x+h]$  finden können mit

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Ähnlich funktioniert es beim Fehler der zweiten Ableitung. Hierzu benötigen wir folgende Taylor-Entwicklungen (mit Restglied)

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_2)$$

**Bitte wenden!**

wobei  $\xi_1 \in [x - h, x]$  und  $\xi_2 \in [x, x + h]$ . Setzen wir dies in obige finite Differenzen Formel für die zweite Ableitung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} &= f''(x) + \frac{1}{24}h^2 (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \\ &= f''(x) + \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi) = \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Auch hier können wir mit dem Mittelwertsatz ein  $\xi \in [x - h, x + h]$  finden.

- c) Aus der Taylor-Entwicklung erwarten wir, dass die Approximationen der ersten und zweiten Ableitung zweite Ordnung Konvergenz aufweisen (solange die relevante Ableitung beschränkt ist), d.h. dass der Fehler der Approximation proportional zu  $h^2$  ist. Dies ist durch die Steigung der entsprechenden Fehler in 1 bestätigt, bevor es Probleme gibt wegen der endlichen Genauigkeit der Maschine (Computer). Das Problem: je kleiner  $h$  desto näher sind sich  $f(x)$  und  $f(x \pm h)$ . Bei der Subtraktion von fast gleich grossen Zahlen dominieren irgendwann die Rundungsfehler. Dieses Phänomen wird als Auslöschung bezeichnet. Wir werden dies nicht weiter in dieser Vorlesung diskutieren, aber es sollte Ihnen stets bewusst sein, dass Rechner eine endliche Genauigkeit besitzen. Um mehr über dieses und ähnliche Phänomene zu erfahren, verweisen wir auf die weiterführende Literatur auf der Webseite.

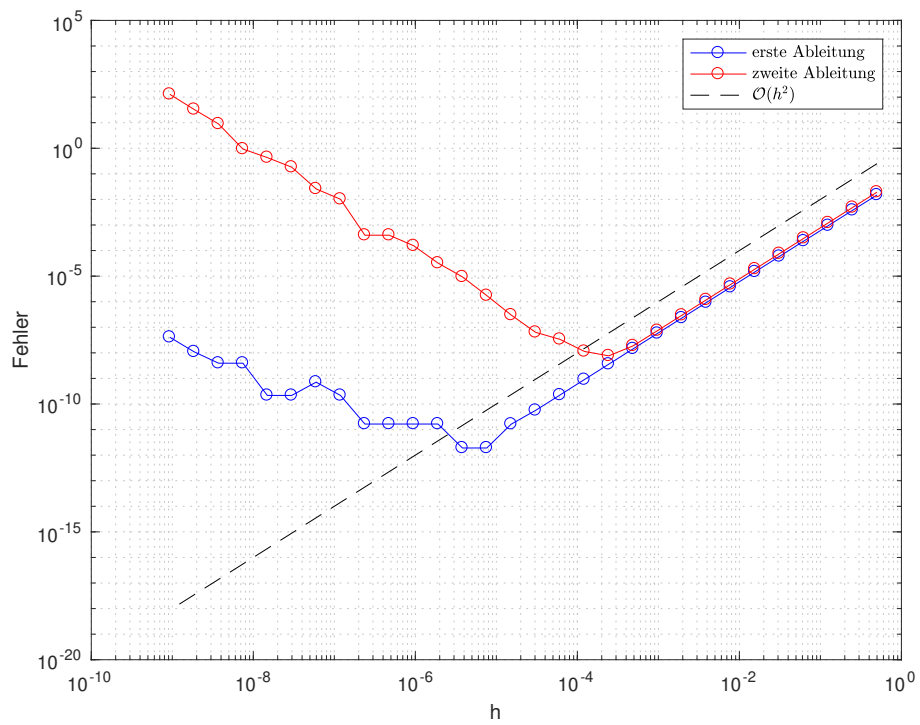


Abbildung 1: Fehler der Approximation der ersten und zweiten Ableitung mit finiten Differenzen.