D-ITET Numerische Methoden FS 2023
Dr. R. Käppeli
Liora Rueff

Serie 2

1. *Genauigkeitsgrad maximieren*

Wir betrachten die folgende Quadraturregel

$$Q[f] = \alpha f(0) + \beta f(1/2) + \gamma f(1)$$

zur Approximation von $I[f] = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Bestimmen Sie die Konstanten α, β and γ so, dass der Genauigkeitsgrad dieser Regel so hoch wie möglich ist.
Hinweis: Da wir drei Parameter haben (α, β, γ), wollen wir diese so bestimmen, dass die Regel $I[1]$, $I[x]$ und $I[x^2]$ exakt integriert.

b) Transformieren Sie die Quadraturregel auf ein beliebiges Intervall $I = [a, b]$. Haben wir eine ähnliche (oder sogar gleiche!) Quadraturregel bereits gesehen?

2. *2-Punkte Gauss Quadraturregel*

Wir betrachten eine 2-Punkte Quadraturregel über dem Referenz-Intervall $I = [-1, +1]$ der Form

$$Q[f] = 2 \cdot (\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1))$$

a) Bestimmen Sie die Quadratur-Knoten and -Gewichte so, dass die Quadraturregel Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat.
Diese Quadraturregel ist die berühmte *2-Punkte Gauss* Quadraturregel.

b) Transformieren Sie die Quadraturregel auf ein beliebiges Intervall $I = [a, b]$.

3. *Uneigentliches Integral mit Quadratur*

Wir betrachten das folgende *uneigentliche* Integral

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4)\, dx.$$

Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden ein *eigentliches* Integral bekommen.

Bitte wenden!

a) Verwenden Sie die Substitution $x = \tan(s)$ und schreiben Sie I in ein (*eigentliches*) Integral um.

b) Wiederholen Sie **a)**, aber mit $x = -\log(s)$.

4. *Numerische Differentiation: Finite Differenzen*

Eine Anwendung von polynomialer Interpolation ist die numerische Differentiation, d.h. die näherungsweise Berechnung von Ableitungen. Wir werden Anwendungen im Verlaufe des Semester sehen, u.a. die Newton Methode und Rückwärtsdifferenzenmethoden.
Die Grundidee ist einfach wie bei der numerischen Integration: approximiere die gewünschte Ableitung mit der Ableitung eines Interpolationspolynom:

$$f(x) \approx p[f|x_0, \ldots, x_n](x)$$

und

$$f^{(k)}(x) \approx p^{(k)}[f|x_0, \ldots, x_n](x)$$

wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet.
Zum Beispiel können wir die erste Ableitung basierend auf zwei Stützstellen x_0, x_1 wie folgt approximieren. Zuerst bestimmen wir das Interpolationspolynom

$$f(x) \approx p\left[f|x_0, x_1\right](x) = \sum_{j=0}^{1} f(x_j)\; L_j^1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Somit erhalten wir eine Approximations der ersten Ableitung mit

$$f'(x) \approx p'\left[f|x_0, x_1\right] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Setzen wir nun $x_0 = x$, $x_1 = x + h$ mit $h > 0$, erhalten wir

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Um die Güte der Approximation etwas genauer zu untersuchen, benutzen wir die Taylor-Entwicklung mit Restglied

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi) - f(x)\right)\\ &= f'(x) + \frac{1}{2}hf''(\xi)\end{aligned}$$

für $\xi \in [x, x+h]$. Dies sagt uns, dass der Fehler der Approximation proportional zu h ist (solange f'' beschränkt ist). Wir sagen, dass der Fehler von erster Ordnung ist.

Siehe nächstes Blatt!

a) Berechnen Sie Approximationen der ersten und zweiten Ableitung mit polynomialer Interpolation und drei Stützstellen x_0, x_1, x_2.

b) Setzen Sie die Stützstellen zu $x_0 = x - h$, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$, und bestimmen Sie den Fehler Ihrer Approximationen aus a) mittels Taylor-Entwicklung.

c) Überprüfen Sie Ihre Rechnung aus **b)** in einem numerischen Experiment mit Matlab. Berechnen Sie hierzu den Fehler Ihrer Approximation der ersten und zweiten Ableitung von $f(x) = \sin(x)$ bei $x = 1.2$ als Funktion von $h = \frac{1}{2^i}$, $i = 0, \dots, 30$. Was beobachten Sie? Überascht Sie etwas?

Abgabe: Online bis **Freitag** den 10.03.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.