Dr. R. Käppeli
L. Rueff

# Serie 3

**1.** *Konvergenzordnung summierter Quadraturregeln*

In dieser Aufgabe wollen wir die Genauigkeit von ein paar summierten Quadraturregeln experimentell untersuchen.

**a)** Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`Q = summtrapezregel(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Trapezregel $Q_1^N[f]$ approximiert. Der Input `N` entspricht der Anzahl von Teilintervallen, in die das Interval $[a, b]$ unterteilt wird.

**b)** Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`Q = summsimpsonregel(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Simpsonregel $Q_2^N[f]$ approximiert.

**c)** Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`Q = summ2punktgauss(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 2-Punkte Gauss Quadraturformel $G_1^N[f]$ approximiert.

**d)** Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`summbestimmeordnung,`

die die Ordnung einer summierten Quadratur bestimmt. Bestätigen Sie, dass die summierte Trapezregel die algebraische Konvergenzordnung 2 besitzt und dass die summierte Simpsonregel und die 2-Punkte Gauss Quadraturformel die algebraische Konvergenzordnung 4 besitzen.

**e)** Wiederholen Sie den Konvergenztest von Teilaufgabe d) für die Trapezregel mit dem Integrand

$$f_1(x) = x^5,\ f_2(x) = \sqrt{x-a},\ f_3(x) = (x-a)^{5/2},$$

und die MATLAB Funktion definiert in `f_4.m`. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

**Bitte wenden!**

**f)** Bestimmen Sie für jedes Verfahren die Anzahl von Funktionsauswertungen.

*Hinweis:* Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

**2.** *3-Punkte Gauss Quadraturregel*

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte 3-Punkte Gauss Quadraturregel $G_2[f]$ herleiten.

**a)** Berechnen Sie die Quadratur Knoten von $G_2[f]$ in dem Sie die Nullstellen des Legendre-Polynoms dritten Grades $P_3(x)$ bestimmen.
*Hinweis:* Zur Berechnung der Gewichte können Sie die Formel in den Vorlesungsnotizen verwenden:

$$\omega_k = \frac{2(1-x_k^2)}{((j+1)P_j(x_k))^2}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

**b)** Bestätigen Sie, dass $G_2[f]$ Ordnung 6 hat.

**c)** Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`Q = summ3punktgauss(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 3-Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

**d)** Wiederholen Sie den Konvergenztest von Serie 3 Aufgabe **1d)** für $G_2[f]$ mit den Integranden

$$f_1(x) = x\cos(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x-a)^{7/3}$$

mit $a = \sqrt{2}$ auf dem Intervall $[\sqrt{2}, \pi]$. Was beobachten Sie?

*Hinweis:* Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

**3.** *Gauss Knoten Verteilung*

Verwenden Sie die MATLAB -Funktion `plot_gauss_nodes` welche die Gauss-Quadratur-Knoten im Referenz-Intervall $[-1, +1]$ plottet. Was fällt Ihnen auf im Vergleich mit der Knoten-Wahl bei Newton-Cotes Quadratur?

**Siehe nächstes Blatt!**

**4.** *Konvergenz*

In der numerischen Mathematik spricht man von algebraischer und exponentieller Konvergenz einer Methode, falls der Fehler der Methode sich wie

$$E(N) = CN^{-\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad E(N) = Cq^N$$

verhält für $N$ gross genug. Hier sind $C$ und $\alpha$ positive Konstanten, $q \in (0,1)$ und $N$ entspricht einem Methodenparameter (z.B. die Anzahl Teil-Intervalle einer summierten Quadraturregel oder den Genauhigkeitsgrad/Ordnung einer Quadraturregel).

**a)** Die MATLAB -Funktion `Konvergenz` berechnet Approximationen des bestimmten Integrals

$$I_i = \int_0^1 f_i(x)dx, \qquad i = 1,2,3,$$

wobei

$$f_1(x) = \cosh(x), \qquad f_2(x) = \sqrt{x}, \qquad f_3(x) = \arcsin(x)$$

mittels Gauss-Legendre Quadratur und plottet die Quadraturfehler als Funktion der Anzahl Knoten der Quadraturregel. Beschreiben Sie welche Art von Konvergenz für $f_1$, $f_2$ und $f_3$ vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung $\alpha$ und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate $q$.

**b)** Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden eine wesentliche Verbesserung des Konvergenz-Verhalten erreichen. Das Integral $I_3$ aus **a)** kann durch die Substitution $y = \arcsin(x)$ auf folgendes transformiert werden

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(y)dy \quad (\equiv I_3).$$

Beschreiben Sie nun welche Art von Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung $\alpha$ und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate $q$.

**c)** Nun wiederholen wir **a)** und **b)** mit den Newton-Cotes Quadraturregeln. Führen Sie hierzu die MATLAB -Funktion `Konvergenz_newcot` aus.
Was beobachten Sie?

**5.** *Gauss Quadratur mit Gewichtsfunktionen*

Wir wollen Integrale der Form

$$I[f] = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

**Bitte wenden!**

mittels Quadratur approximieren. Hierzu bauen wir die Gauss Quadratur mit der Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2}$$

**a)** Berechnen Sie die ersten drei orthogonal Polynome bezüglich dem gewichteten Skalarprodukt,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 w(x) f(x) g(x) dx. \tag{3}$$

*Hinweis*: Ausgehend von der Monombasis $v_j(x) = x^j$, bilden Sie eine Orthogonalbasis $p_j(x)$ bezüglich obigem gewichteten Skalarprodukt (3) mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren,

$$p_k(x) = v_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle v_k, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j(x) \tag{4}$$

**b)** Mit Ihrer in **a**) berechneten Orthogonalbasis bezüglich dem obigem gewichteten Skalarprodukt (3) bestimmen Sie die zwei-Punkte Gauss Quadratur für die Gewichtsfunktion $w(x)$.

*Hinweis*: Die Gewichte sind gegeben durch

$$w_j = \int_0^1 w(x)\, L_j^1(x)\, dx \quad (j = 0, 1),$$

wobei $L_j^1(x)$ $(j = 0, 1)$ die Lagrange-Polynome zu den Knoten $x_{0,1}$ sind. Die Knoten sind die Nullstellen des in **a)** berechneten Orthogonalpolynom.

**c)** Was ist der Vorteil Ihrer Quadratur aus **b)** gegenüber der Trapezregel für Integrale der Form (1)?

**Abgabe:** Online bis **Freitag** den 17.03.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.