D-ITET
Dr. R. Käppeli
L. Rueff

Lösung 4

1. *Qualitatives Kennenlernen adaptiver Quadratur*

Wir erhalten die Plots in Abb. 1. In (v) nimmt die Funktion an den verwendeten Knoten zur Berechnung des Fehler-Schätzers denselben Wert an (Null). Der Fehler-Schätzer registriert also einen Fehler von Null und endet mit dem falschen Result $Q = 0$. Durch das aufteilen des Integrals in (vi) liefert der Fehler-Schätzer wieder brauchbare Resultate und die adaptive Quadratur funktionniert. Obwohl die Beispiele (v) und (vi) (sehr!) künstlich erscheinen, sollen sie uns zeigen, dass adaptive Quadratur nicht Totsicher ist!

2. *Adaptive Quadratur mit der Trapezregel*

a) In der Vorlesung haben wir den folgenden Trick gesehen

$$E^1[f] = \left|Q_1[f] - Q_1^2[f] + Q_1^2[f] - I[f]\right| \leq \left|Q_1^2[f] - Q_1[f]\right| + \left|Q_1^2[f] - I[f]\right|.$$

Mit $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]| \approx \frac{E^1[f]}{2^s}$, erhalten wir

$$E^1[f]\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \approx \left|Q_1[f] - Q_1^2[f]\right| \Leftrightarrow E^1[f] \approx \left(\frac{2^s}{2^s - 1}\right)\left|Q_1[f] - Q_1^2[f]\right|.$$

Dann haben wir für $E^2[f]$

$$E^2[f] \approx \frac{E^1[f]}{2^s} \approx \left(\frac{1}{2^s - 1}\right)\left|Q_1[f] - Q_1^2[f]\right|.$$

Da die Trapezregel die Ordnung $s = 2$ besitzt, ist der Fehler-Schätzer für $E^2[f]$ gegeben durch

$$E^2[f] \approx \frac{|Q_1[f] - Q_1^2[f]|}{3}.$$

b) Siehe `adapttrapez_simple.m`.

c) Die Implementierung `adapttrapez_simple.m` besitzt folgende zwei Haupt-Schwächen:

- Die Rekursion könnte unendlich lang weiter gehen.

- Die Funktionsauswertungen werden immer von neuem berechnet.

3. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Die Lösungen finden Sie in den kommentierten `potential.m` und `trapez2D.m`.

4. *Richardson-Extrapolation*

a) Aus Aufgabe 4 der Serie 2 wissen wir, dass bei zentrierten finiten Differenzen der dominierende Fehler-Term die Ordnung $k_1 = 2$ hat. Setzen wir dies in die Richardson-Extrapolations-Formel ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(h) &= \frac{A(h) - 2^2 A(h/2)}{1 - 2^2} = \frac{4A(h/2) - A(h)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(4 \cdot \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{2(h/2)} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right) \\
&= \frac{f(x-h) - 8f(x-h/2) + 8f(x+h/2) - f(x+h)}{6h} \\
&= A^* + \mathcal{O}(h^{k_2}).
\end{aligned}$$

b) Aus der Vorlsung ist bekannt, dass bei der summierten Trapez-Regel der dominierende Fehler-Term die Ordnung $k_1 = 2$ hat. Setzen wir dies in die Richardson-

Siehe nächstes Blatt!

Extrapolations-Formel ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(h) &= \frac{A(h) - 2^2 A(h/2)}{1 - 2^2} = \frac{4A(h/2) - A(h)}{3} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(h/2)}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{2N-1} f(a + jh/2) + f(b) \right) \\
&\qquad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b) \right) \\
&= \frac{h}{6} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{j=1}^{2N-1} f(a + jh/2) - 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \right] \\
&= \frac{h}{6} \Bigg[f(a) + f(b) + 4 \left(\sum_{k=1}^{N} f\left(a + (2k-1)h/2\right) + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + (2k)h/2\right) \right) \\
&\qquad\qquad - 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \Bigg] \\
&= \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \tfrac{1}{2}\right) h\right) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b) \right] \\
&= A^* + \mathcal{O}(h^{k_2}).
\end{aligned}
$$

Beobachten Sie, dass $\tilde{A}$ genau die summierte Simpson-Regel ist, d.h. $\tilde{A}(h) = Q_2^N[f]$.

c) Aus den Fehler-Plots in Abb. 2 entnehmen wir, dass die Richardson-extrapolierte zentrierte finite Differenz und die summierte Trapezregel Ordnung $k_2 = 4$ haben. In beiden Fällen haben wir also zwei Ordnungen gewonnen! Dies hat damit zu tun, dass die Fehler-Entwicklung beider Verfahren nur aus geraden Potenzen des Diskretisierungs-Parameters besteht.

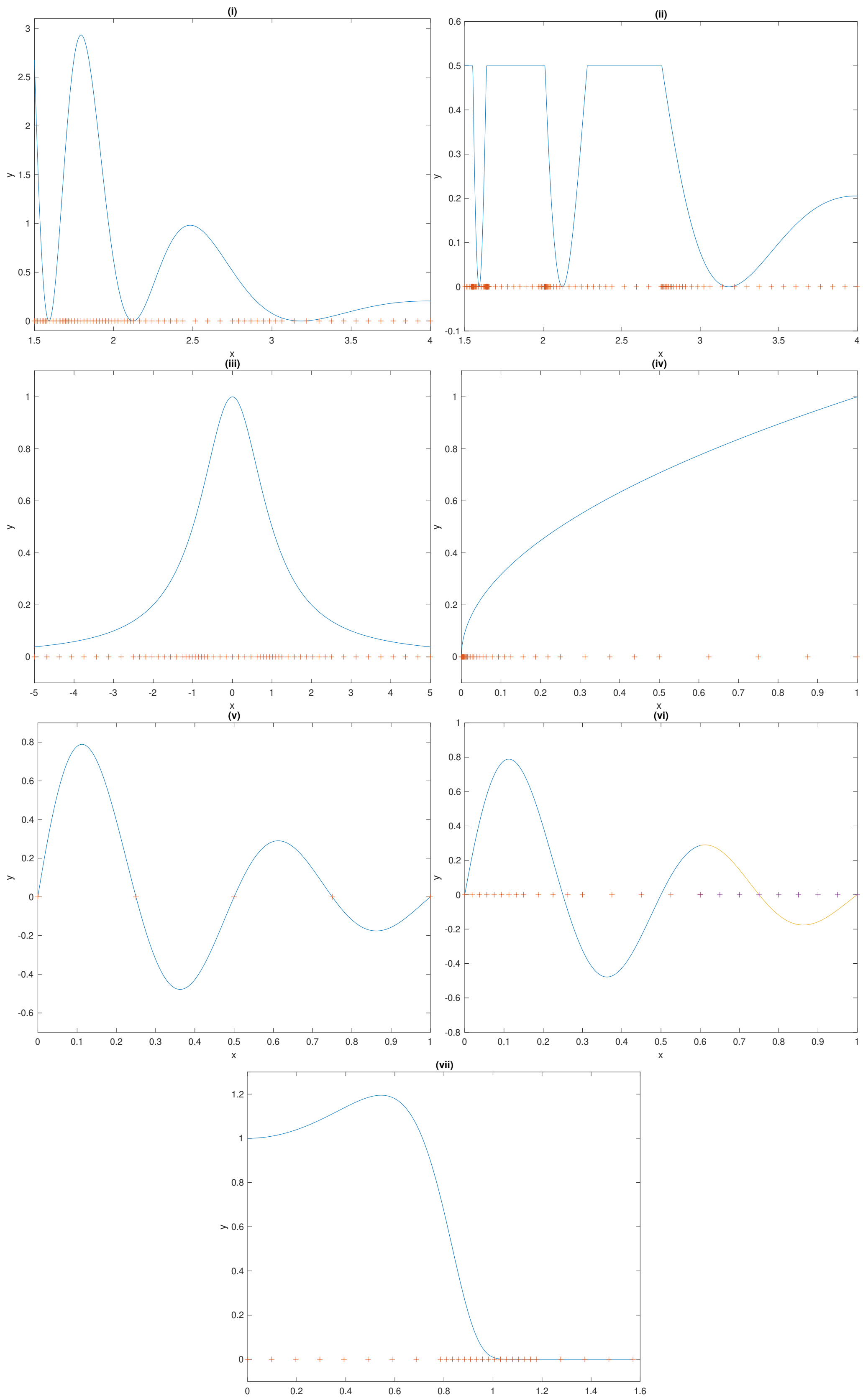

Abbildung 1: Plots zur adaptiven Simpson Quadratur.

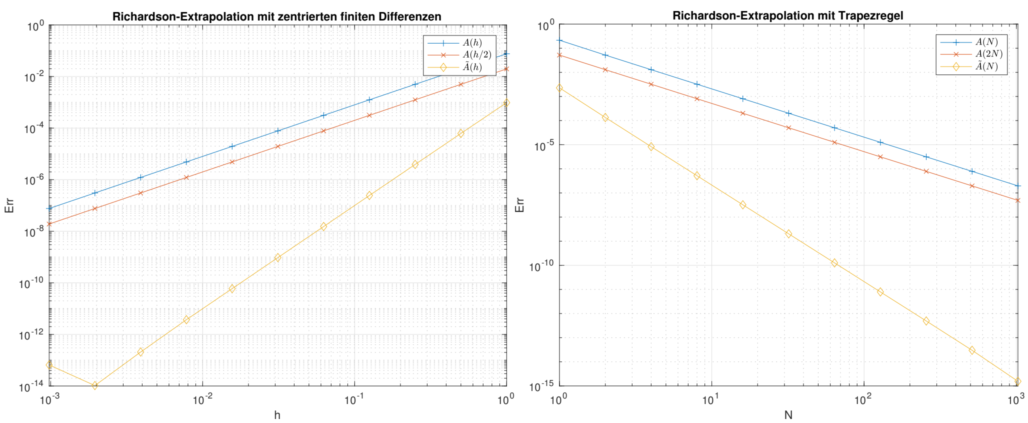

Abbildung 2: Richardson-Extrapolation angewendet auf zentrierte finite Differenzen (links) und die summierte Trapezregel (rechst).