

Serie 5

1. Explizites Euler Verfahren

- a) Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = (a - by(t))y(t). \quad (1)$$

Plotten Sie das Richtungsfeld von Gl. (1) mit der MATLAB Funktion `richtungsfeld.m` für $t \in [0, 5]$ und $y \in [0, 1]$. Wählen Sie $a = 1$, $b = 2$ und verwenden Sie jeweils 20 Punkte in t und y Richtung.

Hinweis: Arbeiten Sie im MATLAB-Template `logistischeDGLrichtungsfeld.m`.

- b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion

$$[t, y] = \text{expEuler}(f, t_0, T, y_0, N),$$

die die Lösung eines allgemeinen Anfangswertproblem

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

zum Endzeitpunkt $T > t_0$ mit N Schritten des expliziten Euler Verfahrens approximiert.

- c) Lösen Sie mit Ihrer `expEuler` Funktion aus **b)** die Gl. (1) für die Anfangswerte $y(0) = 0.2$ und $y(0) = 1$. Plotten Sie die beiden Lösungskurven in das Richtungsfeld von **a)**. Verwenden Sie jeweils $N = 100$ Euler Schritte.
- d) Nun wollen wir untersuchen wie gut das Euler Verfahren funktioniert. Hierzu betrachten wir das (einfachste!) Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Dieses hat bekanntlich die exakte Lösung

$$y(t) = e^t.$$

Lösen Sie (2) mit dem expliziten Euler Verfahren bis zur Zeit $T = 2$ mit $N = 2^i$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) Schritten und berechnen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit

$$E_N = |y_N - y(T)|.$$

Plotten Sie den absoluten Fehler E_N als Funktion des Zeitschritts $h = (T - t_0)/N$ in einem $\log\log$ -Plot. Mit Ihrem Plot bestimmen Sie p , die sog. Ordnung des Verfahrens, graphisch die abhängig des Fehlers als Funktion von h , d.h. $E_N = O(h^p)$.

Hinweis: Arbeiten Sie im MATLAB-Template `expEulerConv.m`.

2. Picard-Iteration

In einfachen Fällen kann man mittels des sog. Picard-Iterationsverfahren die Lösungen einer Differentialgleichung explizit berechnen. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{c},\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{y}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

In diesem Fall ist ein Schritt dieses Verfahrens gegeben durch

$$\mathbf{y}^{[k+1]}(t) = \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{y}^{[k]}(\tau) d\tau,$$

zusammen mit $\mathbf{y}^{[0]}(t) = \mathbf{c}$. Berechnen Sie die ersten Iterationen dieses Verfahrens und folgern Sie daraus die exakte Lösung des AWP.

Hinweis: Folgende Reihe könnte von nutzen sein:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{6} + \dots$$

3. Umformen von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen

a) Formen Sie folgendes Anfangswertproblem vierter Ordnung

$$\frac{y^{(4)}(t)}{t} = \sin\left(\frac{y}{t+1}\right) + \log(\ddot{y}) - t^2\dot{y}$$

mit Anfangswerten

$$y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 2, \quad \ddot{y}(t_0) = -1, \quad \ddot{\ddot{y}}(t_0) = 4$$

in ein Anfangswertproblem erster Ordnung um.

Siehe nächstes Blatt!

- b) Eine gewöhnliche Differentialgleichung heisst autonom, falls die rechte Seite die form $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ hat (anstatt $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$), d.h. \mathbf{f} hängt nicht explizit von t ab). Eine gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ kann man autonomisieren durch das Einführen einer neuen Variabel

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ z_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

und der neuen rechten Seite

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(z_{n+1}, \mathbf{z}_1(t)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \log\left(\frac{t}{2}\right) + 4 \cos(3t) y, \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

- c) Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem aus a).

4. RLC Schaltkreis

Es ist bekannt, dass die Ladung Q von einem Kondensator in einem RLC Schaltkreis die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E \quad (3)$$

erfüllt, wobei $L = 1$ der Induktivität, $R = 2$ dem Widerstand, $C = 0.0016$ der Kapazität und $E = 10 \cos(100t)$ der Anregung entsprechen. Die Anfangswerte seien gegeben durch

$$Q(t_0) = Q_0, \quad \dot{Q}(t_0) = I_0.$$

- a) Wandeln Sie (3) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.
- b) Ergänzen Sie das MATLAB-Template `expEulerRLC.m`, das die Kurve der Ladung und des Stromes mit $N = 100, 1000$ and 10000 Schritten des expliziten Eulerverfahrens approximiert.
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Implementierung des expliziten Euler Verfahren aus Aufgabe 1. b).

Abgabe: Online bis **Freitag** den 31.03.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.