Serie 6

1. *Lipschitz-Stetigkeit*

a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine entscheidende Rolle für die eindeutige Lösbarkeit des AWPs spielt, ob die rechte Seite f Lipschitz-stetig ist oder nicht. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein besseres Gefühl für das Konzept der Lipschitz-Stetigkeit zu bekommen.

Sind die folgende Funktionen (lokal) Lipschitz stetig auf dem Intervall $[-1, 1]$? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$f(x) = x^2\,, \quad f(x) = |x|\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0\,, \\ -1 & x \geq 0\,, \end{cases} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,.$$

b) Erfüllen die folgenden AWPe die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf?

- $\dot{y}(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = |y(t)|, \quad y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(t_0) = 0, \quad t_0 = 1$

2. *Butcher-Tableaux*

Geben Sie für die folgenden Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

a)

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{2h}{3}, y_j + \frac{2h}{3} k_1\right), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_2\right). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b)

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\
k_2 &= f\left(t_j + h, y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\right), \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\
k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(t_j + \frac{2h}{3}, y_j + \frac{2h}{3}k_2\right), \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{4}\left(k_1 + 3k_3\right).
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\
k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f\left(t_j + h, y_j + hk_3\right), \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
\end{aligned}
$$

3. *Verbesserte Polygonzugmethode von Euler*

In dieser Aufgabe wollen wir eine Verbesserung gegenüber der Euler Methode implementieren und seine Qualität empirisch untersuchen. Die verbesserte Polygonzugmethod von Euler ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k), \\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\
y_{k+1} &= y_k + hk_2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

a) Skizzieren Sie dieses Verfahren im Richtungsfeld.

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.
Hinweis: Arbeiten Sie im Template `verbEuler.m`.

Siehe nächstes Blatt!

c) Berechnen Sie mit (1) approximative Lösungen von den folgenden AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = & (y(t))^2, \\ y(0) = & 0.5 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $T = 1$ mit $N = 2^i$ ($i = 3, 4, ..., 9$) Schritten. Bestimmen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit $|y_N - y(T)|$ und plotten Sie diesen Fehler als Funktion von $h = 1/N$ in einem `loglog`-plot. Bestimmen Sie dann die Steigung der Gerade mithilfe des Befehls `polyfit`.
Hinweis: Die exakten Lösungen zu den AWP wurden in der Vorlesung angegeben. Arbeiten Sie im Template `konvOrdnungEmpirisch.m`.

4. *Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert*

Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda\left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 2$ und $\lambda = 10$.

a) Überprüfen Sie, dass die exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

b) Lösen Sie das AWP mit der verbesserten Polygonzugmethode von Euler aus Aufgabe 3. Verwenden Sie $N = 2 \times 10^i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) Schritte und plotten Sie die genäherten Resulate gemeinsam mit der exakten Lösung. Interpretieren Sie die Resultate.
Hinweis: Betrachten Sie einen leicht gestörten Anfangswert: $y(t_0) = \epsilon + \frac{t_0^2}{1+t_0^2}$.

c) Wiederholen Sie **b)** mit $\lambda = -10$. Erklären Sie das beobachtete Verhalten.

Abgabe: Online bis **Freitag** den 21.04.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.