Lösung 7

1. *Explizites RK-ESV bauen*

a) Wir haben

$$\begin{aligned} I[1] = \int_0^1 1dx &= 1, \\ I[x] = \int_0^1 xdx &= \frac{1}{2}, \\ I[x^2] = \int_0^1 x^2dx &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

und für die Quadraturregel $Q[g]$

$$\begin{aligned} Q[1] &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow ✓ \\ Q[x] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow ✓ \\ Q[x^2] &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{5}{16} \Rightarrow ✗ \end{aligned}$$

Also hat die Quadraturregel Genauigkeitsgrad $q = 1$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ordnung einer Quadraturregel gegeben durch $s = q+1$ ist. Damit hat die Quadraturregel Ordnung $s = 2$.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Durch Integration erhalten wir

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds.$$

Wir wenden dann unsere Quadraturregel auf das Integral für $t_1 = t_0 + h$ an und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds \approx \frac{h}{2}\left(f\left(t_0+\frac{h}{4}, y\left(t_0+\frac{h}{4}\right)\right) + f\left(t_0+\frac{3h}{4}, y\left(t_0+\frac{3h}{4}\right)\right)\right).$$

Wir approximieren $y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right)$ und $y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right)$ mithilfe des expliziten Eulerverfahrens

$$\begin{aligned} y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right) &\approx y_0 + \frac{h}{4} f(t_0, y_0), \\ y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right) &\approx y_0 + \frac{3h}{4} f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{cases} k_1 := & f(t_0, y_0), \\ k_2 := & f\left(t_0 + \frac{h}{4}, y_0 + \frac{h}{4} k_1\right), \\ k_3 := & f\left(t_0 + \frac{3h}{4}, y_0 + \frac{3h}{4} k_1\right), \\ y_1 := & y_0 + \frac{h}{2}(k_2 + k_3). \end{cases}$$

c) Siehe `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von 1.99 ≈ 2.

2. *Das Klassische Runge-Kutta Verfahren*

a) Ein Schritt des Verfahrens is gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_k, y_k\right), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right), \\ k_4 &= f\left(t_k + h, y_k + h k_3\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \end{aligned}$$

b) Siehe `klassischeRK.m`.

c) Siehe `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von 3.98 ≈ 4.

3. *Konsistenzordnung*

Im folgenden betrachten wir das skalare Anfangswert-Problem (AWP) erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und bezeichnen mit der "rechten Seite" die Funktion $f(t, y(t))$. Weiter setzen wir stillschweigend voraus, dass die rechte Seite genügend oft stetig differenzierbar ist (damit die kommenden Entwicklungen Sinn machen!).

Um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^p)$$

mittels Taylor-Entwicklungen abschätzen. Hierzu entwickelt man die Lösung und die Verfahrens-Funktion in Potenzen der Schrittweite h

$$\begin{aligned} \tau_{j+1} = &\quad \Big(\dot{y}(t_j) - \ \Phi(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ &+ \frac{h}{2}\Big(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ &+ \frac{h^2}{6}\Big(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\Big) \\ &+ \cdots \\ &+ O(h^p). \end{aligned} \tag{1}$$

Um die Konsistenzordnung p zu bestimmen, muss man nun "einfach" die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

Einerseits benötigen wir die Ableitungen der Lösung, ausgedrückt mit (Ableitungen) der rechten Seite der Diff.-Gl. $f(t, y(t))$:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))\, f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))\, f(t, y(t))^2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right)^2 f(t, y(t)). \end{aligned} \tag{4}$$

Es empfiehlt sich, diese einfachen (aber durchaus mühsamen) Rechnungen (einmal) selbst durchzurechnen.

Anderseits brauchen wir die Ableitungen der Verfahrens-Funktion welche wir als Funktion der Schrittweite h auffassen, d.h. $\Phi = \Phi(h)$ wobei t und damit auch $y(t)$

fest gehalten werden. Zunächst schreiben wir also das Verfahren von Heun in Stufen-Form

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f(t_j + h, y_j + hk_1) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\,. \end{aligned}$$

Die Verfahrens-Funktion dieses ESV ist damit gegeben durch

$$\Phi(t, y(t), h) = \frac{1}{2}\Big(k_1(t, y(t), h) + k_2(t, y(t), h)\Big).$$

Da wir t und damit auch $y(t)$ fest halten, vereinfachen wir die Notation zu

$$\Phi(h) = \frac{1}{2}\Big(k_1(h) + k_2(h)\Big).$$

Die Entwicklung der ersten Stufe ergibt einfach eine Konstante

$$k_1(h) = f(t, y(t)),$$

da wir ja t festhalten. Für die Entwicklung der zweiten Stufe benötigt man die zweidimensionale Taylor-Entwicklung (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned} k_2(h) &= f(t + h, y(t) + hk_1(h)) \\ &= f(t, y(t)) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))h + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))hk_1(h) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t))h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))h^2 k_1(h) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))(hk_1(h))^2 \\ &+ \cdots \\ &= f(t, y(t)) \\ &+ h\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right) \\ &+ \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

wobei wir nach dem dritten Gleichheitszeichen $k_1(h)$ durch vorherige Gleichung er-

Siehe nächstes Blatt!

setzt haben. Somit ergibt sich die Entwicklung der Verfahrens-Funktion zu

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) &= \frac{1}{2}\Big(k_1(h) + k_2(h)\Big) \\
&= \underbrace{f(t, y(t))}_{\Phi(t,y(t),0)} \\
&+ h\,\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t))\right)}_{\dot{\Phi}(t,y(t),0)} \\
&+ \frac{h^2}{2}\,\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) f(t, y(t))^2\right)}_{\ddot{\Phi}(t,y(t),0)} \\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Mit Gl. (2-4) und (5) können wir die Terme in den Klammern von Gl. (1) berechnen. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \Phi(t, y(t), 0) \\
\ddot{y}(t) &= 2\dot{\Phi}(t, y(t), 0) \\
\dddot{y}(t) &\neq 3\ddot{\Phi}(t, y(t), 0),
\end{aligned}
$$

d.h. der erste und der zweite Klammer-Term in Gl. (1) sind Null und hierraus folgern wir, dass das Verfahren von Heun Konsistenzordnung $p = 2$ hat, d.h.

$$
\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^2).
$$

4. *Die Methode der Taylorreihe*

a) Wir haben

$$
\begin{aligned}
-2ty^2 &= -2(t_j + h)\left(y_j + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots\right)^2 \\
&= -2(t_j + h)\left(y_j^2 + 2c_1 y_j h + (c_1^2 + 2c_2 y_j)h^2 + (2c_1 c_2 + 2c_3 y_j)h^3 + \dots\right) \\
&= \underbrace{(-2t_j y_j^2)}_{c_1} + \underbrace{(-2y_j^2 - 4c_1 t_j y_j)}_{2c_2} h + \underbrace{(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j))}_{3c_3} h^2 \\
&+ \underbrace{(-2(c_1^2 + 2c_2 y_j) - 4t_j(c_1 c_2 + c_3 y_j))}_{4c_4} h^3 + \dots
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -2t_j y_j^2 \\
c_2 &= -y_j^2 - 2c_1 t_j y_j \\
c_3 &= \frac{1}{3}\left(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j)\right) \\
c_4 &= -\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2 y_j + t_j(c_1 c_2 + c_3 y_j)\right)
\end{aligned}
$$

b) Siehe `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.