Lösung 8

1. **a)** Wir müssen einfach die Bedingung überprüfen:

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren ist autonomisierungsinvariant:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{4} b_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 && \checkmark \\
0 = c_1 &= \sum_{l=1}^{4} a_{1l} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 && \checkmark \\
\frac{1}{2} = c_2 &= \sum_{l=1}^{4} a_{2l} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2} && \checkmark \\
\frac{1}{2} = c_3 &= \sum_{l=1}^{4} a_{3l} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} && \checkmark \\
1 = c_4 &= \sum_{l=1}^{4} a_{4l} = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 && \checkmark
\end{aligned}$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler ist autonomisierungsinvariant:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{2} b_i = 0 + 1 = 1 && \checkmark \\
0 = c_1 &= \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = 0 + 0 = 0 && \checkmark \\
\frac{1}{2} = c_2 &= \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} && \checkmark
\end{aligned}$$

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren ist **nicht** autonomisierungsinvariant:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{2} b_i = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 && ✓ \\ \frac{1}{3} = c_1 &\neq \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = 0 + 0 = 0 && ✗ \\ \frac{5}{9} = c_2 &\neq \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} && ✗ \end{aligned}$$

(iv) Die SDIRK Methode dritter Ordnung ist autonomisierungsinvariant:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{2} b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 && ✓ \\ \gamma = c_1 &= \sum_{l=1}^{2} a_{1l} = \gamma + 0 = \gamma && ✓ \\ 1 - \gamma = c_2 &= \sum_{l=1}^{2} a_{2l} = (1 - 2\gamma) + \gamma = 1 - \gamma && ✓ \end{aligned}$$

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, dann vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung dadurch, dass man "nur" das autonome AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

zu betrachten braucht. D.h. man kann sich die mühsamen partiellen Ableitungen nach der Zeit in den Rechnungen schencken!

Konkret ergibt sich für die Ableitungen der Lösung

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt} f(y(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) f(y(t)) \tag{2}$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(y(t)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))\, f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)) \tag{3}$$

Siehe nächstes Blatt!

und für die Entwicklung der Verfahrens-Funktion

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) = & \underbrace{f(y(t))}_{\Phi(y(t),0)} \\
& + h \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))f(y(t))\right)}_{\dot{\Phi}(y(t),0)} \\
& + \frac{h^2}{2} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))f(y(t))^2\right)}_{\ddot{\Phi}(y(t),0)} \\
& + \cdots
\end{aligned} \tag{4}
$$

Es ist offensichtlich, dass diese Ausdrücke wesentlich einfacher sind verglichen mit denen in Aufgabe 1. Die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun $p = 2$ ist natürlich identisch zum Resultat von Aufgabe 1.

Fazit: Man überprüfe zuerst ob ein Verfahren autonomisierungsinvariant (denn falls ja vereinfachen sich die Rechnungen massiv!).

2. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

a) Das Verfahren ist durch

$$
\begin{aligned}
k_1 =& f(t_n, y_n), \\
k_2 =& f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1), \\
y_{n+1} =& y_n + \frac{1}{4}h(k_1 + 3k_2)
\end{aligned}
$$

definiert.

b) Wie wir in Aufgabe 2 gesehen haben, vereinfacht sich die Bestimmung der Konsistenzordnung erheblich bei einem autonomisierungsinvarianten Verfahren.

Schritt 1: Wir überprüfen zunächst, ob die Methode autonomisierungsinvariant ist

$$
\begin{array}{lll}
c_1 = 0 & \text{und} \quad \sum_{j=1}^{2} a_{1j} = 0 + 0 = 0 & \checkmark \\
c_2 = \frac{2}{3} & \text{und} \quad \sum_{j=1}^{2} a_{2j} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} & \checkmark
\end{array}
$$

Schritt 2: Wie erklärt in Aufgabe 1, um die Konsistenzordnung p eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion Φ zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned}\tau_{j+1} = & \left(\dot{y}(t_j) - \ \Phi(t_j, y(t_j), 0)\right) \\ & + \frac{h}{2}\left(\ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\right) \\ & + \frac{h^2}{6}\left(\dddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0)\right) \\ & + \cdots \\ & + O(h^p)\end{aligned} \tag{5}$$

berechnen und die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

In unserem Fall ist die Verfahrens-Funktion definiert durch

$$\Phi(h) = \Phi(t_j, y(t_j), h) := \frac{1}{4}\left(f\left(y\left(t_j\right)\right) + 3f\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right)\right).$$

Nun berechnen wir die Terme in der Φ Entwicklung und

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(h) &= \frac{1}{2}f(y(t_j))\frac{\partial f}{\partial y}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right), \\ \ddot{\Phi}(h) &= \frac{1}{3}\left(f(y(t_j))\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y\left(t_j\right) + \frac{2}{3}hf\left(y\left(t_j\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Lösung haben wir

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(y(t)) \\ \ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt}f(y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t))f(y(t)) \\ \dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}f(y(t)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y(t))f(y(t))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t))\right)^2 f(y(t)).\end{aligned}$$

Durch Vergleich

$$\begin{aligned}\Phi(t_j, y(t_j), 0) &= \dot{y}(t_j), \\ 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &= \ddot{y}(t_j), \\ 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) &\neq \dddot{y}(t_j),\end{aligned}$$

ergibt sich dass das Verfahren die Konsistenzordnung $\tilde{p} = 2$ besitzt.

Siehe nächstes Blatt!

c) Es folgt von Satz II.3, dass das Verfahren Konvergenzordnung $p = 2$ hat wenn die rechte Seite Funktion genügend glatt ist (mindestens zwei mal stetig differenzierbar).

3. *Konsistenz Expliziter Runge-Kutta Verfahren*

Gemäss Hinweis, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= f(t_0 + c_1 h, y_0) = f(t_0, y_0) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
k_2(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_2 h}_{\Delta t}, y_0 + \underbrace{a_{21} h k_1(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + a_{21} h k_1(0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) = f(t_0, y_0) + O(h), \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
k_i(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_i h}_{\Delta t}, \underbrace{y_0 + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0, y_0) + O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h), \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
k_s(h) &= f\Big(t_0 + \underbrace{c_s h}_{\Delta t}, \underbrace{y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} k_j(h)}_{\Delta y}\Big) \\
&= f(t_0, y_0) + h c_s \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \underbrace{k_j(0)}_{f(t_0, y_0) + O(h)} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2) \\
&= f(t_0, y_0) + O(h).
\end{aligned}
$$

Ein Schritt eines expliziten RK Verfahrens lautet dann

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.$$

Bitte wenden!

Aus $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, erhalten wir

$$y_1 = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) (f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)) = y_0 + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Der Konsistenzfehler ist dann

$$\begin{aligned} \frac{|y(h) - y_1|}{h} &= \frac{|y_0 + hf(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2) - y_1|}{h} \\ &= \frac{|y_0 + hf(t_0, y_0) - y_0 - h\left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h^2))|}{h} \\ &= \left| \left(1 - \sum_{i=1}^{s} b_i \right) f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h) \right|. \end{aligned}$$

Damit das Verfahren konsistent ist für alle hinreichend glatten f, muss gelten

$$\frac{|y(h) - y_1|}{h} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Dies soll auch gelten für z.B. $f(t, y) = 1$. Dies ist nur möglich falls

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Bemerkung: Aus obiger Darstellung folgt auch direkt, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ hinreichend ist für die Konsistenz eines expliziten RK Verfahrens.

4. *Toleranz Variieren*

a) Given

$$y(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}, \tag{6}$$

we have

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{1 + t^2} \frac{d}{dt}\{t^2\} + t^2 \frac{d}{dt}\{\frac{1}{1 + t^2}\} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2} - t^2 \frac{2t}{(1 + t^2)^2} \\ &= \frac{2t}{(1 + t^2)^2}. \end{aligned}$$

Hence, (6) solves the given AWP problem.

Siehe nächstes Blatt!

b) See `tolVar.m`. We observe that the `ode45` solution diverges. The point of divergence is delayed as the tolerances become smaller.

c) The exact solution remains the same when $\lambda = -10$.

d) See `tolVar.m`. For $\lambda = -10$, we observe that `ode45` solution converges to the exact solution irrespective of the given absolute and relative tolerances.

e) Specifying the tolerances controls the time step size in `ode45`. The observations from b) and d) can be explained based on *Satz II.3* in lecture notes *Kap02_Notizen.pdf, page 40*.

Remark: The primary takeaway from this exercise is that one should not blindly trust the numerical solution provided by the integration schemes. Rather, perform simple tests, such as the one presented in this exercise, to verify their accuracy for your particular system.